

Aplikace waveletové transformace v digitálním zpracování obrazu

The Application of the Wavelet Transform in Digital Image Processing

Zadání diplomové práce

Student:

Bc. Michal Votípka

Studijní program:

N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103T031 Výpočetní matematika

Téma:

Aplikace waveletové transformace v digitálním zpracování obrazu
The Application of the Wavelet Transform in Digital Image Processing

Zásady pro vypracování:

Student by se měl seznámit s waveletovou (vlnkovou) transformací (WT), efektivně ji implementovat a použít ji ve zpracování obrazu. Jedná se tedy o využití WT zejména k:

- 1/ odstranění šumu (image denoising) pomocí
 - a/ přímé WT, vhodného prahování (VisuShrink, SUREShrink, BayesShrink, atd.) a zpětné WT,
 - b/ mazání singulárních čísel v SVD rozkladu matice paketového rozkladu,
- 2/ úpravě kontrastu (image enhancement) používané hlavně při zpracování medicínských dat s využitím nelineárního zobrazení,
- 3/ kompresi obrazu (image compression) zejména pak použití WT v
 - a/ JPEG2000 standardu (pro statický obraz),
 - b/ MPEG standardu (pro dynamický - video obraz),
 - c/ embedded zerotree kompresi,
- 4/ rozpoznávání vzorů (pattern recognition) jako je
 - a/ detekce hran (edge detection) založená na hledání lokálních maxim waveletovských koeficientů odpovídajících singularitám v obrazu,
 - b/ rozpoznávání znaků (character recognition),
 - c/ klasifikace textur (texture classification),
 - d/ rozpoznávání obličejů (human face recognition).

Výsledek použití WT závisí na zvolené waveletovské bázi. Hlavním cílem diplomové práce je systematické porovnání jednotlivých waveletovskýchází pro tyto aplikace.

The student should study the wavelet transform (WT), implement it efficiently and apply it to the image processing. WT is used mainly for:

- 1/ image denoising by means of
 - a/ WT, suitable thresholding (VisuShrink, SUREShrink, BayesShrink, etc.) and inverse WT,
 - b/ deleting the singular values in SVD decomposition of the matrix containing the packet decomposition,
- 2/ image enhancement using nonlinear mapping especially for the medical data processing,
- 3/ image compression mainly in
 - a/ JPEG2000 standard,
 - b/ MPEG standard,
 - c/ embedded zerotree compression,
- 4/ pattern recognition as
 - a/ edge detection based based on finding local maxima of the wavelet coefficients corresponding to the singularities in the image,
 - b/ character recognition,
 - c/ texture classification,
 - d/ human face recognition.

The result of the WT usage depends on the chosen wavelet basis. The main aim of this thesis is systematic comparison of the different wavelets for particular applications.

Seznam doporučené odborné literatury:

[1] D. Horák, Diskrétní transformace, <http://mi21.vsb.cz/modul/diskretni-transformace>, 2011.

[2] G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstein, Fourier and wavelet analysis, Springer, ISBN 0-387-98899-8, 2000.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. David Horák, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015



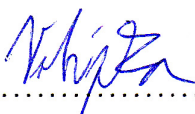
doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2015


.....

Zde bych chtěl poděkovat panu Ing. Davidu Horákovi, Ph.D. za pomoc, ochotu a rady při psaní této práce.

Abstrakt

Tato práce se zabývá různými aplikacemi waveletové transformace v oblasti digitálního zpracování obrazu. Waveletovská reprezentace signálu je novou technikou, která v mnoha oblastech nahradila Fourierovu transformaci. Postupně je věnována technikám odstraňování obrazového šumu, úpravě kontrastu - zejména u medicínských snímků, detekci hran, která je základem pro rozpoznávání vzorů v obraze a také kompresi obrazu. Jednotlivé aplikace byly implementovány s různými wavelety v programu MATLAB. Wavelety jsou mezi sebou navzájem porovnány, neboť výběr waveletové báze velmi ovlivňuje výsledek zpracování obrazu.

Klíčová slova: wavelety, waveletová transformace, odšumování obrazu, komprese obrazu, úprava kontrastu, rozpoznávání vzorů, detekce hran, medicínské snímky.

Abstract

This thesis deals with different applications of wavelet transform in digital image processing. Wavelet representation of the signal is a new technique which replaced the Fourier transform in many areas. We focused on techniques of image denoising, image enhancement - especially for medical images. Further we apply wavelet transform to edge detection which is the base for pattern recognition in image and also to image compression. Individual applications were implemented with different wavelets in MATLAB. Wavelets are compared each other because the selection of wavelet basis greatly affects the result of image processing.

Keywords: wavelets, wavelet transform, image denoising, image compression, image enhancement, pattern recognition, edge detection, medical images.

Seznam použitých zkratk a symbolů

| | |
|---------------------|---|
| \mathbb{Z} | – množina celých čísel |
| \mathbb{R} | – množina reálných čísel |
| $L^2(\mathbb{R}^n)$ | – $L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^n} f(x) ^2 dx < +\infty \right\}$ |
| MRA | – multiúrovňová analýza (multirozklad) |
| WT | – waveletová transformace |
| CWT | – spojitá waveletová transformace |
| DWT | – diskrétní waveletová transformace |
| IDWT | – zpětná diskrétní waveletová transformace |
| LL_n | – diagonální aproximační koeficienty na n -té úrovni |
| HL_n | – vertikální detailní koeficienty na n -té úrovni |
| HH_n | – diagonální detailní koeficienty na n -té úrovni |
| LH_n | – horizontální detailní koeficienty na n -té úrovni |
| PSNR | – špičkový odstup signál/šum |

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Úvod | 4 |
| 2 | Historie a vznik waveletů | 6 |
| 3 | Waveletová transformace | 8 |
| 3.1 | Spojitá waveletová transformace - CWT | 8 |
| 3.2 | Diskrétní waveletová transformace - DWT | 11 |
| 3.3 | Přehled waveletů | 15 |
| 3.4 | Výběr waveletu | 20 |
| 4 | Metrika k určování kvality obrazu | 22 |
| 4.1 | Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) | 22 |
| 5 | Aplikace waveletové transformace | 23 |
| 5.1 | Odstraňování obrazového šumu | 23 |
| 5.2 | Komprese obrazu | 31 |
| 5.3 | Úprava kontrastu | 42 |
| 5.4 | Rozpoznávání vzorů | 49 |
| 6 | Závěr | 57 |
| 7 | Literatura | 59 |

Seznam obrázků

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Dekompozice signálu pomocí banky filtrů (převzato z [32]) | 12 |
| 2 | Schéma DWT pro 2D obraz s dvěma stupni dekompozice (převzato z [34]) | 14 |
| 3 | Haarův wavelet | 15 |
| 4 | Wavelet Daubechies 4 | 16 |
| 5 | Wavelet Daubechies 8 | 17 |
| 6 | Wavelet Daubechies 16 | 17 |
| 7 | Wavelet Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 (Biorthogonal 4.4) | 18 |
| 8 | Wavelet Coiflet 2 | 18 |
| 9 | Wavelet Symlet 6 | 19 |
| 10 | Komplexní wavelet SCD-6 | 20 |
| 11 | Blokové schéma principu odšumování s využitím waveletovy transformace | 23 |
| 12 | Rozdíl mezi měkkým (vlevo) a tvrdým (vpravo) prahováním po čtyřech (nahore) a šesti (dole) stupních dekompozice | 27 |
| 13 | Porovnání několika stupňů dekompozice s Haarovou vlnkou | 28 |
| 14 | Porovnání jednotlivých metod s různými druhy vlnek | 29 |
| 15 | Porovnání metody pro odstraňování šumu pomocí SVD rozkladu matice paketového rozkladu | 30 |
| 16 | Vynulované HH_1 a LH_1 koeficienty s využitím Daubechies 16 vlnkou, $PSNR = 87,4449$ dB | 31 |
| 17 | Porovnání obrazů po vynulování jednotlivých stupňů dekompozice pro různé typy vlnek | 32 |
| 18 | Sekvence kroků při typické kompresi obrazu s využitím waveletové trans- formace | 33 |
| 19 | Proces JPEG komprese (převzato z [20]) | 34 |
| 20 | Schéma při JPEG 2000 kompresi (převzato z [12]) | 36 |
| 21 | Porovnání zkomprimovaného obrazu pomocí JPEG 2000 a JPEG standardu | 38 |
| 22 | Stromová reprezentace obrazu pro EZW kódování (převzato z [17]) | 40 |
| 23 | Průchod obrazem pomocí rastrového skenu a Mortonova rozkladu (pře- vzato z [17]) | 41 |
| 24 | Ukázka úpravy kontrastu pomocí nelineární modifikace a ekvalizace his- togramu | 42 |
| 25 | Úprava kontrastu pomocí (21) s vlnkou Daubechies 8 | 44 |
| 26 | Úprava kontrastu pomocí (22) s vlnkou Daubechies 16 | 44 |
| 27 | Úprava kontrastu pomocí (23) s vlnkou Daubechies 8 | 45 |
| 28 | Vliv stupně dekompozice na změnu kontrastu, 3. typ modifikace, vlnka Daubechies 16 | 46 |
| 29 | Původní plochý snímek hrudního koše určený k následné úpravě kontrastu | 46 |
| 30 | Úprava kontrastu pomocí třech představených modifikací v porovnání s vlnkami | 47 |
| 31 | Úprava kontrastu pomocí třech představených modifikací s obrázkem Lenny | 48 |

| | | |
|----|---|----|
| 32 | a) původní obraz. b) - e) obraz $M_s f(x, y)$ pro $s = 2^j, 1 \leq j \leq 4$. Černé pixely indikují nulové hodnoty a bílé pixely korespondují s nejvyššími hodnotami. f) - i) obraz $A_s f(x, y)$ pro $s = 2^j, 1 \leq j \leq 4$ Hodnoty úhlů v rozmezí od 0 (černá) po 2π (bílá). j) - m) Výsledný obraz s detekovanými hranami (černě). Obrázky byly převzaty z [30] | 52 |
| 33 | Detekce hran pomocí dvou různých technik | 54 |
| 34 | Porovnání detekce hran s Cannyho detektorem. a) Cannyho detektor aplikovaný na celý obraz. b) Odšuměný obraz a následný Cannyho detektor na celý obraz. c) Technika č. 2 s využitím waveletové transformace při detekci | 54 |
| 35 | Porovnání dvou technik pro detekci hran s různými vlnkami | 56 |

1 Úvod

Digitální zpracování obrazu má v dnešní době velký význam. Prakticky každý signál (obraz) je nutno zpracovat, aby mohl být dále využit. Vstupem pro digitální zpracování mohou být data různého původu, např. obrazová data z digitálního fotoaparátu, rentgenové či ultrazvukové snímky vygenerované lékařským zařízením nebo satelitní snímky z družice. Většinou tyto obrazy trpí nějakou vadou, kterou je nutno eliminovat.

V práci se věnujeme moderní technice, která je známá jen několik málo let. Řeč je o waveletové transformaci, která nachází uplatnění v široké škále digitálního zpracování obrazu. Zaměřujeme se na nejznámější aplikace pro obrazová data, konkrétně na odstraňování obrazového šumu, úpravu kontrastu, detekci hran a kompresi obrazu. Mnohdy práce obsahuje i porovnání waveletovské metody s běžně známou technikou pro danou aplikaci. Výsledek procesu s waveletovou transformací velmi závisí na použité bázi (waveletu), která ovlivní kvalitu výsledku dané aplikace. Na konci kapitoly, každé aplikace, je porovnání mezi jednotlivými wavelety.

Uvedme stručně průlet prací. V kapitole 2 najdeme informace o historii waveletové transformace, kam až sahají její kořeny a jak se postupně formovala do podoby, v jaké je dnes. Kapitola 3 obsahuje teoretické informace o waveletové transformaci včetně přehledu waveletů a jejich vlastností. V kapitole 4 je krátce představena metrika PSNR, používaná k porovnání kvality obrazu. Hlavní část práce je obsažena v kapitole 5. V jednotlivých podkapitolách nalezneme postupně již zmíněné aplikace. Podkapitola 5.1 se věnuje odstraňování obrazového šumu. Zaměřili jsme se na prahovací metody VisuShrink, SureShrink, BayesShrink a jednu netypickou metodu s využitím SVD rozkladu. Následovala podkapitola 5.2, která se věnovala aplikaci WT v kompresi obrazu. Waveletová transformace je hlavní nástroj v kompresním formátu JPEG 2000. Její implementace by však byla nad rámec této práce, proto se standardu JPEG 2000 věnujeme teoreticky. Porovnali jsme výhody i nevýhody se známým standardem JPEG. Také jsme ukázali, jak se změní kvalita rekonstruovaného obrazu, pokud některé dekompozice zcela vynulujeme a tím obraz de facto komprimujeme. Další zajímavou aplikací je úprava kontrastu (podkapitola 5.3). Lékařské přístroje generují obraz poněkud nevýrazný, těžce se v něm orientuje a stanovení diagnózy pacienta je obtížné. Proto je nutné takový obraz zpracovat a vylepšit. Zaměřujeme se na techniky nelineární modifikace waveletovských koeficientů, které poskytují velké výhody v porovnání s tradiční ekvalizací histogramu. Vyzkoušeli jsme tři různé modifikace a výsledky otestovali na mamografickém a rentgenovém snímku. Poslední aplikací, kterou najdeme v podkapitole 5.4, byla detekce hran, která hraje velkou roli v oblasti rozpoznávání vzorů v obraze. Ukázali jsme opět tradiční metodu Cannyho detektor, který je silným nástrojem pro detekci hran v obraze. Následně jsme zkombinovali známé metody pro detekci hran a s využitím waveletové transformace a prahovací metody VisuShrink ukázali dvě hybridní techniky při detekci hran. Detekci hran jsme prováděli stejně jako u ostatních aplikací na obrázku Lenny, ale také pro obraz s diago-

nálními, vertikálními a horizontálními vzory společně s textem v jednom. To abychom pokryli co nejvíce možných vzorů.

Důležitou součástí této práce byla také implementace těchto aplikací waveletové transformace v programu MATLAB, tedy i samotná diskrétní waveletová transformace. Na přiloženém CD lze najít veškeré zdrojové kódy použité v práci.

2 Historie a vznik waveletů

Teorie waveletů (vlnek) se začala rapidně rozvíjet až v osmdesátých letech 20. století. Tento silný nástroj k řešení mnoha nejen matematických problémů vycházel z nezávislých prací mnoha vědců, na kterých, aniž by to navzájem tušili, téměř celé století pracovali. Tato teorie byla významně svázána s teorií signálů, v dnešní době však řadíme wavelety mezi matematiku, teorii signálů a zpracování obrazu a zvuku. Teorie se neustále zobecňuje a prohlubuje, proto dnes nachází uplatnění v celé řadě vědních oborů. Podrobnější informace lze najít v [2].

Nyní něco málo k historii teorie waveletů. Podíváme-li se zpět do historie matematiky, najdeme hned několik různých zdrojů waveletové analýzy. Největší část této teorie vznikala ve třicátých letech 20. století. V té době se ještě netušilo, že by spolu tehdejší výsledky výzkumu nějakým způsobem souvisely. Neznámé bylo i slovo wavelet, i celková koncepce současné teorii waveletů. První myšlenku vůbec, která se stala nejdůležitějším podnětem pro vznik waveletové teorie, přinesl již v roce 1807 Joseph Fourier se svými známými Fourierovými řadami.

Ale již v roce 1873 Paul Du Bois-Reymond zkonstruoval spojitou 2π -periodickou reálnou funkci, jejíž Fourierova řada v daném bodě diverguje. Proto se začalo zkoumat, jak by bylo možné Fourierovy řady vylepšit. A právě jednou možností tehdy bylo nalézt jiný ortonormální systém funkcí.

Touto cestou se vydal k objevu Alfred Haar, který v roce 1909 ve své disertační práci "K teorii ortogonálních systémů funkcí," našel jiný možný ortonormální systém. Jeho výzkum vedl k vývoji množiny obdélníkových bázových funkcí. Později celé rodiny waveletů. Haarův wavelet byl pojmenován na základě této množiny funkcí a byl také nejjednodušším waveletem své doby. Haarovy bázové funkce se skládaly z krátkého kladného pulsu následovaný krátkým záporným pulsem [1].

V jeho objevu byla poprvé představena další základní myšlenka waveletové teorie: popisovat prostory funkcí pomocí celočíselných translací a dyadických dilatací jedné jediné funkce.

Ve třicátých letech pokročil výzkum o velký kus vpřed. Významný fyzik té doby, Paul Lévy, se snažil zkoumat některé vlastnosti Brownova pohybu. Zjistil, že pro reprezentaci některých komplikovaných detailů je Fourierův trigonometrický systém nepoužitelný. Když zkoušel uplatnit reprezentaci pomocí Haarovy báze, ukázalo se, že výpočty jsou daleko přesnější, a že takto lze získat korektní výsledky. Toto uplatnění Haarova systému se dá považovat za první významné využití waveletové báze v praxi.

Pojem wavelet se poprvé objevil v práci fyzika A. Grossmanna a inženýra J. Morleta z roku 1980. Zajímali se především o kvantovou fyziku, zavedli v tomto kontextu první ucelenou waveletovou teorii a ukázali souvislost waveletů s fyzikální praxí. Vycházeli přitom z výsledků matematika A. Calderóna z šedesátých let. Zdůrazněme, že mezi všemi těmito vědci tehdy neexistoval téměř žádný kontakt, a proto všechny výsledky výzkumu, i když velmi podobné, byly objeveny nezávisle na sobě vědci z různých zemí a především různých vědních oborů.

V osmdesátých letech přišel S. Mallat s aplikací při digitálním zpracování signálů. Nejdůležitějším krokem, který vedl k prosperitě waveletů, bylo vymyšlení multirozkladové analýzy (multirozkladu) společně s Y. Meyerem. Multirozklad umožňoval návrh škálovacích funkcí, které dovolovaly ostatním výzkumníkům konstruovat vlastní báze waveletů. Například Ingrid Daubechies kolem roku 1988 vytvořila vlastní rodinu waveletů, zvané Daubechies wavelety na základě teorie multirozkladu.

Wavelety se začala zabývat celá řada odborníků z matematického i fyzikálního hlediska, a protože komunikace již byla snadnější, byla tak postupem času vytvořena jednotná teorie waveletů, ustálena definice pojmu wavelet a také odvozeny veškeré jeho základní vlastnosti. Souběžně se objevovaly nové příklady waveletů vycházející z různých typů funkcí.

Jmenovitě mezi nejvýznamnější průkopníky, kteří se významným způsobem zasloužili o vznik a rozvoj této teorie, patří: R. Coifman, J. O. Strömberg, S. Mallat, Y. Meyer, I. Daubechies, G. Beylkin, P. Wojtaszczyk a mnoho dalších.

3 Waveletová transformace

Co je to wavelet? Pokud slyšíme slovo wavelet (v češtině vlnka), myslí se tím báze, přesněji ortonormální báze. Ta je tvořena funkcí, mateřským waveletem ψ , z nějaké třídy funkcí, například $L^2(\mathbb{R})$. Snahou je vygenerovat nějakou bázi pomocí dilatace a translace mateřského waveletu ψ . Wavelety jsou funkce definované jako [33]

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (1)$$

Chceme-li popsat, jak je waveletová transformace definována, budeme potřebovat složitější matematický aparát, jehož základem je tzv. víceúrovňová analýza (angl. multiresolution analysis - MRA) [3].

MRA, která byla vyvinuta v posledních letech, měla příznivý dopad na pole zpracování obrazu. Jde o techniku ke zkoumání signálů ve škálové doméně, podobně jako Fourierova transformace zkoumá signály ve frekvenční doméně. Významným výsledkem studie MRA je spočetná množina waveletů, která dokáže vytvořit ortonormální bázi pro $L^2(\mathbb{R})$ [33]. Pro následující text jsme využili [3].

Definice. Multirozkladem $L^2(\mathbb{R}^n)$ (víceúrovňovou analýzou) budeme nazývat neklesající posloupnost uzavřených škálovacích podprostorů $V_m \in L^2(\mathbb{R}^n), m \in \mathbb{Z}$ pro něž platí následující podmínky:

1. $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$, tj. $V_m \subset V_{m+1}, \forall m \in \mathbb{Z}$.
2. $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$.
3. $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ je hustý a představuje $L^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L^2(\mathbb{R}^n)$.
4. $f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2t) \in V_{m+1}, t \in \mathbb{R}^n$.
5. Existuje funkce $\phi \in V_0$ taková, že $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální bázi V_0 . Funkce $\phi \in V_0$ se nazývá škálovací funkce, resp. otcovský wavelet.

3.1 Spojitá waveletová transformace - CWT

Definice. Necht' $f(t), \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Spojitou waveletovou transformaci funkce $f(t)$ definujeme

$$WT(f) = F(a, b) = \hat{f}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (2)$$

kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tzv. dilatační škálový parametr, $b \in \mathbb{R}$ je translační parametr, $\psi(t)$ je mateřský wavelet nebo jen obecně wavelet splňující podmínku

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Zpětná (inverzní) spojitá waveletová transformace je dána předpisem

$$WT^{-1}(F) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(a, b) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da \right) db. \quad (3)$$

Obraz F je tedy definován jako skalární součin analyzované funkce f s translacemi a dilatacemi ψ , čili [3]

$$F(a, b) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle. \quad (4)$$

Waveletová transformace využívá nějaký druh okna k filtraci signálu. Pomocí parametru a se provádí změna měřítka, parametr b představuje posouvání okna v měřítku a po časové ose. Zatímco Fourierova transformace využívá konstantní velikost okna, waveletová transformace mění velikost okna pro lepší zachycení frekvencí [32].

3.1.1 Vlastnosti spojitě waveletové transformace

Waveletovské koeficienty, čili koeficienty získané po waveletové transformaci obsahují informace o použitém waveletu, ale také o analyzované funkci. Necht' $WT(f(t)) = F(a, b)$, pak následující vlastnosti nejsou závislé na použitém typu waveletu [3]:

1. linearita: $WT(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha WT(f_1) + \beta WT(f_2) = \alpha F_1(a, b) + \beta F_2(a, b)$,
2. invariance vzhledem k posunutí: $WT(f(t - b_0)) = F(a, b - b_0)$,
3. invariance vzhledem k dilataci: $WT\left(f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right) = \frac{1}{a_0} F\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right)$,
4. derivování originálu: $WT\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} f\right) = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m} (\bar{\psi}_{a,b}(t)) dt$,
5. v případě ortogonální waveletovské báze (analogie Parsevalovy věty):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \bar{f}_2(t) dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(a, b) \bar{F}_2(a, b) a^{-2} da db \Rightarrow$$

energie signálu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(a, b)|^2 a^{-2} da db.$$

3.1.2 Konstrukce ortonormálních waveletů

Vycházeli jsme z [3]. Necht' P_m značí ortogonální projekci f do V_m a D_{2^m} je dilatační operátor, tj. $f(\cdot) \in D_{2^m} V_n \Leftrightarrow f(2^m \cdot) \in V_{m+n}$. S rostoucím m pak $P_m f$ lépe aproximuje f , tedy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m f = f.$$

Prostor V_m je tvořen škálovými funkcemi $\{\phi_{mn}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Neboť dle definice MRA, je prostor V_m obsažen také v prostoru V_{m+1} , definujme W_m jako m -tý waveletový prostor, který obsahuje waveletové funkce $\{\phi_{mn}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \forall m \in \mathbb{Z}$ tak, aby byl ortogonálním doplňkem V_m do V_{m+1} , tj.

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m,$$

dále Q_m je projekční operátor do W_m - škálované verze W_0 , kde $f(\cdot) \in W_m \Leftrightarrow f(2^{-m} \cdot) \in W_0$. Podobně je W_m tvořen waveletovými funkcemi $\{\phi_{mn}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \forall m \in \mathbb{Z}$. Pak

$$P_{m+1} = P_m \oplus Q_m$$

je projekční operátor do V_{m+1} .

Jak již bylo zmíněno, MRA umožňuje sestavit ortonormální waveletovskou bázi $\{\psi_{mn}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \forall m \in \mathbb{Z}$, kde $\psi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ tak, že pro každou funkci $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ platí:

$$\begin{aligned} P_{m+1}f &= P_m f + Q_m f = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{mn} \phi_{mn} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{mn} \psi_{mn} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle P_m f, \phi_{mn} \rangle \phi_{mn} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle Q_m f, \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}. \end{aligned}$$

Koeficienty a_{mn} se nazývají aproximačními, nízkofrekvenčními, škálovými nebo trendovými. Koeficienty d_{mn} pak detailními, vysokofrekvenčními, waveletovskými nebo doplňkovými.

Ortonormalita je zaručena na jednotlivých úrovních m , tj.

$$\langle \phi_{mk}, \phi_{ml} \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Pro skalární součin mezi sousedními úrovněmi pak platí

$$\langle \phi_{m,k}, \phi_{m+1,l} \rangle = h_{l-2k}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{\forall k} h_k^2 = 1.$$

Konstrukce ψ je dána následující procedurou. Necht' l^2 je diskrétní analog prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Je-li $\phi \in V_0 \subset V_1$ a $\{\phi(2t - n)\}$ je ortonormální báze V_1 , pak posloupnost koeficientů $h_n \in l^2$ splňuje tzv. **dilatační rovnici**

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2t - n), \quad (5)$$

kde h_n jsou škálovací filtrační koeficienty, které zajišťují ortonormalitu. Pokud má $\phi(t)$ kompaktní nosič, pak je počet těchto koeficientů nenulový. Vyřešením rovnice (5) odstartovala éra konstrukce ortonormálních waveletů.

Definujme

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2t - n), \quad (6)$$

pak wavelety $\psi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ tvoří ortonormální waveletovské báze prostorů W_m , které se nazývají Daubechiesové. Tyto wavelety nemají osy symetrie a ortonormalita je zaručena mezi různými úrovněmi m . V případě jen ortogonální báze platí

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2t - n), \quad \psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2t - n). \quad (7)$$

3.2 Diskrétní waveletová transformace - DWT

Spojité waveletová transformace má své nevýhody při realizaci, jde zejména o [34]:

- Redundance dat (nadbytečnost) - po CWT dostaneme nekonečné množství koeficientů, které nelze prakticky využít.
- Pro většinu funkcí nemá CWT analytické řešení, je proto nutné počítat numericky.

Následující text je čerpán z [32]. K získání přibližného výsledku CWT se provádí její diskrétní aproximace. Předpis pro diskrétní aproximaci signálu $f(t)$ lze zapsat

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{m,n} \psi_{m,n}(t).$$

kde koeficienty $d_{m,n}$ značí diskrétní waveletovou transformaci signálu $f(t)$. Myšlenka DWT je stejná jako u CWT, ale metody se liší. CWT provádí konvoluci waveletu přímo se signálem, zatímco DWT se provede konvolucí vstupního signálu současně s nízkopásmovým a vysokopásmovým filtrem. Nízkopásmový filtr je definován posloupností h_n , kde je typicky jen pár nenulových hodnot. Vyskopásmový filtr se značí g_n . Nízkopásmový filtr se sestaví s využitím vysokopásmového jako

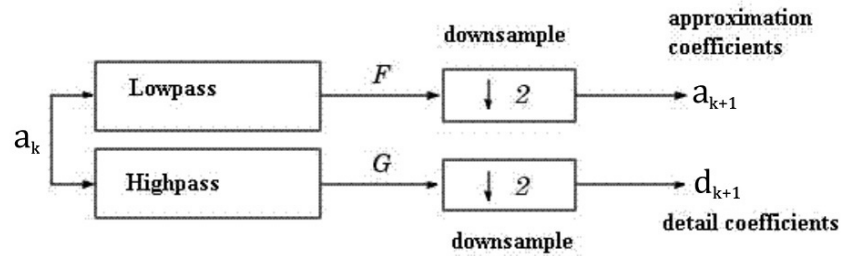
$$h_n = (-1)^n g_{1-n},$$

kde vzájemná ortogonalita filtrů

$$\sum_n h_n g_{n+2j} = 0$$

pro všechna $j \in \mathbb{Z}$ je splněna. Po konvoluci obou filtrů se vstupním signálem, jsou oba výstupy podvzorkovány na polovinu, kdy se jednoduše každý druhý vzorek vynechá. Po filtraci s g_n dostaneme detailní koeficienty a po filtraci s h_n se koeficienty nazývají aproximační. Proces je znázorněn na obrázku 1. Je zde zobrazena banka filtrů, která má strukturu stromu, rozdělující signál do několika komponent. Aproximační koeficienty v každém stupni dekompozice, mohou být opět filtrovány, čímž se postupně buduje strom. Dekompozice se může opakovat za účelem zvýšení frekvenčního rozlišení.

Pro rekonstrukci obrazu se pak provádí IDWT, která je prováděna v opačném pořadí než DWT. Místo podvzorkování signálu se provede nadvzorkování a to tak, že se jednotlivé koeficienty prokládají nulami. Dále se provede konvoluce s h_n a g_n , kdy jejich součet dává aproximační koeficienty (v případě, že byl proveden jen jeden krok DWT, tak dostaneme původní signál).



Obrázek 1: Dekompozice signálu pomocí banky filtrů (převzato z [32])

Vzorkujeme nyní parametry a, b dle

$$a = a_0^m, \quad b = n \cdot b_0 \cdot a_0^m, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

tím dostaneme diskretizovanou waveletovskou funkci

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi(a_0^{-m}t - n \cdot b_0), \quad (8)$$

kde $a_0 > 1$ a $b_0 > 0$, dilatace a translace jsou určeny pomocí m a n . Pak waveletová transformace s diskretními wavelety pro spojitý signál $f(t)$ je definována

$$F_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(a_0^{-m}t - n \cdot b_0) dt. \quad (9)$$

Hodnoty $F_{m,n}$, zvané také jako waveletovské nebo detailní koeficienty jsou dány na dilatačně-translační mřížce nad m, n . Zpětná diskretizovaná waveletová transformace je formulována

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{m,n} \psi_{m,n}(t). \quad (10)$$

Škálování dyadické mřížky

Dyadická mřížka je jednou z nejjednodušších a nejvíce efektivních diskretizací pro praktické účely a také nejběžněji používaná metoda ke konstrukci ortonormální waveletovské báze. Dyadickou mřížku dostaneme, když zvolíme parametry $a_0 = 2$ a $b_0 = 1$. Rovnici (8) pak lze přepsat jako dyadický wavelet

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m}t - n). \quad (11)$$

Pak lze dyadickou waveletovou transformaci s waveletem (11) zapsat

$$F_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{m,n}(t) dt. \quad (12)$$

Předpis pro inverzní dyadickou waveletovou transformaci je shodný s (10).

Jelikož pracujeme se signály konečné délky, uveďme, jak je definovaná **diskrétní waveletová transformace (DWT)**, s kterou budeme pracovat. Předpisy pro konvoluci i s podvzorkováním jsou dány

$$a_{k+1} = \sum_{l=1}^M a_k(l) \cdot h(l - 2k), \quad (13)$$

$$d_{k+1} = \sum_{l=1}^M a_k(l) \cdot g(l - 2k), \quad (14)$$

kde M je velikost signálu, a_k představuje vstupní signál nebo aproximační koeficienty z předchozí úrovně. Výsledkem jsou aproximační koeficienty a_{k+1} a detailní koeficienty d_{k+1} . **Inverzní diskrétní waveletová transformace (IDWT)** je realizována tak, že se výstupy DWT nadvzorkují (prokládání nulou) a následně se provedou konvoluce s jednotlivými filtry, tedy

$$a_k = \sum_{l=1}^M a_{k+1}(l) \cdot h(l - k) + \sum_{l=1}^M d_{k+1}(l) \cdot g(l - k). \quad (15)$$

3.2.1 Problém konečné délky signálů

Problém se projevuje na okrajích intervalu analyzovaného signálu po DWT. Je důsledkem konečné délky obou signálů u DWT při konvoluci. Dle charakteru signálu lze tento nežádoucí jev zcela nebo částečně eliminovat pomocí [34]:

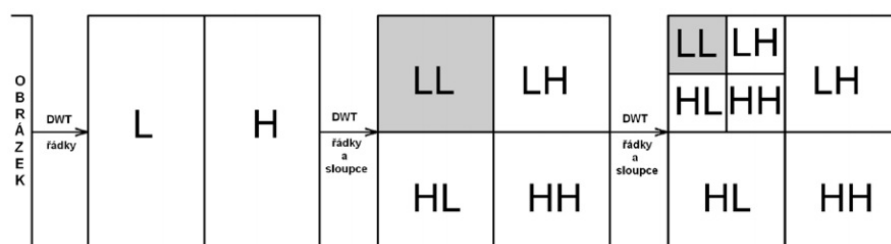
- **doplnění signálu nulami** - chybějící část nutná pro výpočet konvoluce se doplní nulami, je to jednoduché řešení, které většinou zapříčiní problémy na okrajích signálu po DWT,
- **symetrizace** - doplnění původním signálem symetricky kolem okrajového bodu, vyvolá vznik nesrovnalostí v první derivaci a tedy i na okrajích intervalu signálu po DWT, vhodné pro 2D transformaci obrazů,
- **periodizace** - doplnění signálu periodickým opakováním původního signálu, vhodné zejména pro signály periodického charakteru, nevyvolává vznik nesrovnalostí na okrajích signálu po DWT.

3.2.2 Waveletová transformace obrazu

Doposud jsme si uvedli, jak se provede DWT v případě jednorozměrného signálu, čímž jsme získali detailní a aproximační koeficienty. My se však budeme zabývat obrazovými funkcemi, které jsou většinou dvourozměrné. Princip DWT pro 2D obrazy zůstává stejný. Nejprve se aplikuje 1D DWT na řádky a poté se na výsledek této transformace aplikuje znovu 1D DWT na sloupce. Tohle je jeden krok waveletové transformace neboli první stupeň dekompozice. Výsledkem je obraz transformovaný do čtyřech částí (subpásem):

- HH - diagonální obraz, detaily,
- HL - vertikální obraz, detaily,
- LH - horizontální obraz, detaily,
- LL - aproximační část dané úrovně obsahující nejvíce informace.

Aproximační část se pak použije pro druhý stupeň dekompozice, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Schéma DWT pro 2D obraz s dvěma stupni dekompozice (převzato z [34])

Zpětná 2D DWT se provede obdobně - jednorozměrná IDWT nejprve na řádky a pak na sloupce.

3.3 Přehled waveletů

Výsledek procesu s waveletovou transformací závisí na použité vlnce. Existuje několik stovek různých waveletů [34]. V následujícím textu uvedme některé typy waveletů společně s jejich vlastnostmi a grafem mateřského i otcovského waveletu, který byl převzat z [35].

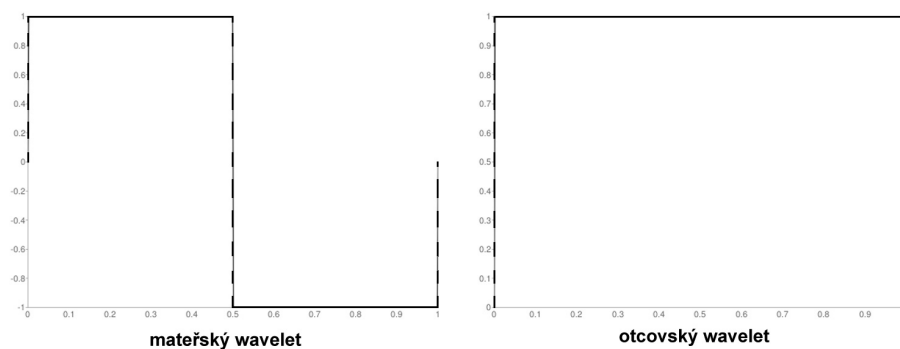
3.3.1 Haarův wavelet

Jedná se o nejjednodušší wavelet, jednoduchý k implementaci, který je však nespojitý [34]. Neumožňuje hladkou rekonstrukci signálu. Někdy se také označuje jako wavelet Daubechies 2. V některých literaturách se může označovat i jako Daubechies 1.

Vlastnosti:

- je symetrický,
- má kompaktní nosič,
- vhodný pro CWT i DWT,
- ortogonální i biortogonální,
- má explicitní vyjádření

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}.$$



Obrázek 3: Haarův wavelet

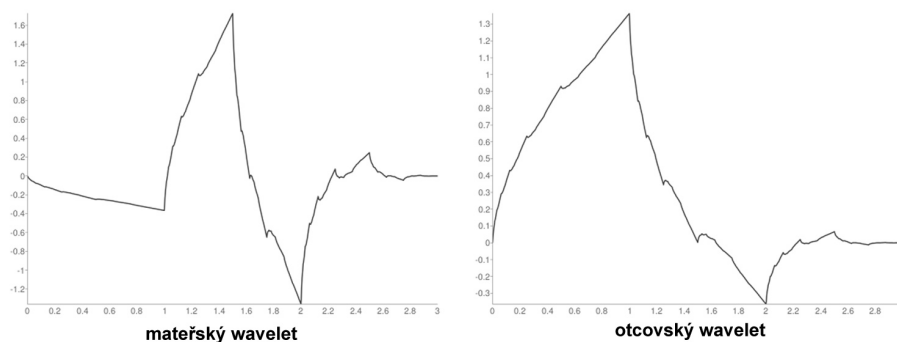
3.3.2 Daubechies wavelety

Tato třída waveletů nemá explicitní vyjádření, kromě waveletu Daubechies 2. Používá se číselné vyjádření ve formě filtračních koeficientů, které poprvé spočítala Ingrid Daubechies (1988) [3]. Ortonormální wavelety s $2M = N$ nenulovými filtračními koeficienty se značí DAUB N (db N), resp. DAUB $2M$ (db $2M$), tedy např. wavelet DAUB 2 je již zmíněný Haarův wavelet [34]. V této práci jsme se drželi značení, kdy N je počet nenulových koeficientů.

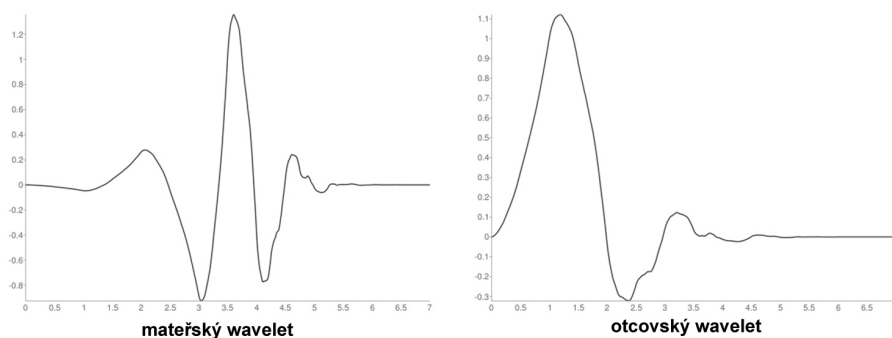
Vlastnosti:

- jsou asymetrické,
- mají kompaktní nosič,
- vhodné pro CWT i DWT,
- ortogonální i biortogonální,
- nemají explicitní vyjádření.

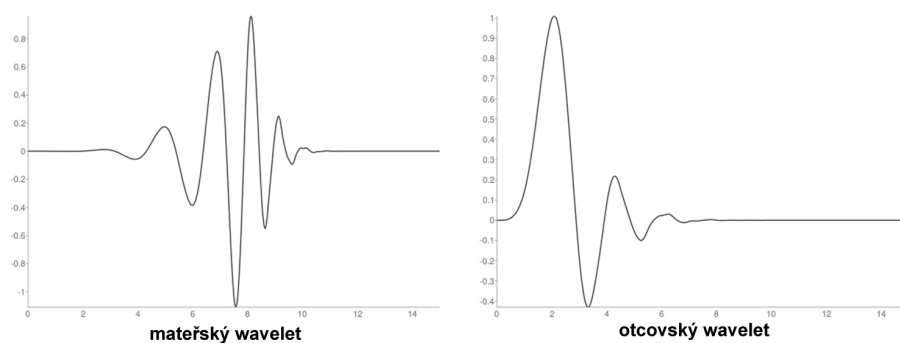
Vlastnosti pro všechny Daubechies wavelety jsou stejné, uveďme proto nyní jen průběhy některých z nich, které jsou dále v práci využívány. A tedy wavelety: Daubechies 4, Daubechies 8 a Daubechies 16.



Obrázek 4: Wavelet Daubechies 4



Obrázek 5: Wavelet Daubechies 8



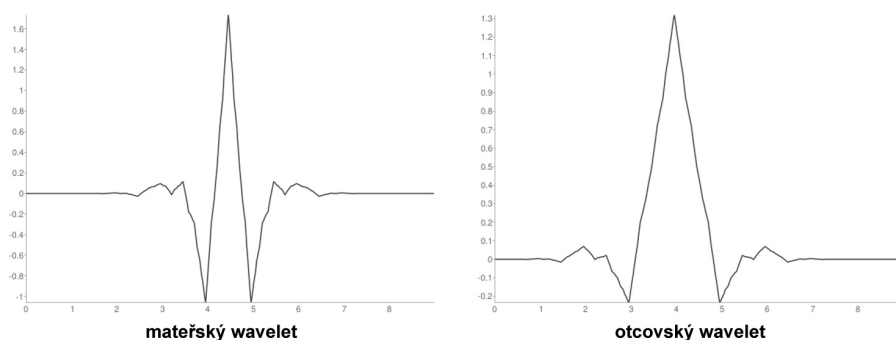
Obrázek 6: Wavelet Daubechies 16

3.3.3 Wavelet Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7

Wavelet používaný u ztrátové JPEG 2000 komprese, označovaný jako CDF 9/7 nebo také Bior 4.4. Reverzní biortogonální vlnky mají stejné vlastnosti jako biortogonální, značí se $Rbio\ N_r \cdot N_d$, kde N_r, N_d je počet nenulových koeficientů pro rekonstrukci a dekompozici [36].

Vlastnosti:

- je symetrický,
- má kompaktní nosič,
- vhodný pro DWT,
- není ortogonální, ale je biortogonální,
- má explicitní vyjádření, ale používá se aproximace ve formě koeficientů.



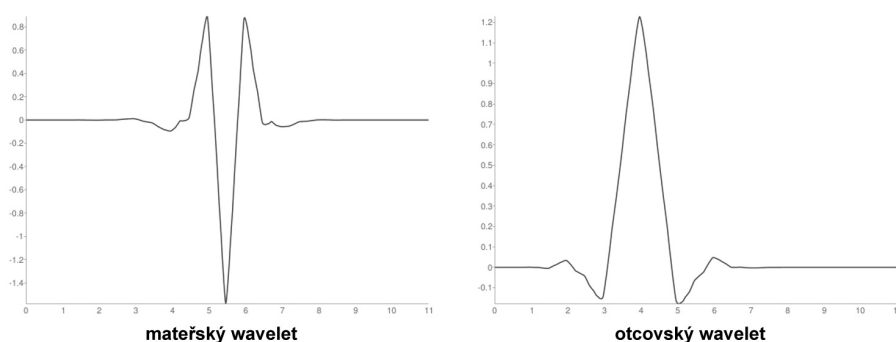
Obrázek 7: Wavelet Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 (Biorthogonal 4.4)

3.3.4 Wavelet Coiflet 2

Coiflet wavelety jsou konstruovány podobně jako Daubechies wavelety, značí se Coif N , kde N je řád, $1 \leq N \leq 5$. Délka filtru je netypicky $6N$ [36].

Vlastnosti:

- téměř symetrický,
- má kompaktní nosič,
- vhodný pro DWT,
- ortogonální i biortogonální,
- nemá explicitní vyjádření.



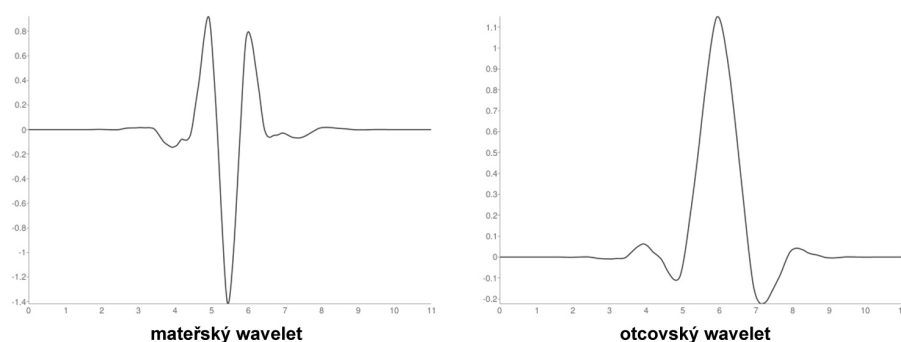
Obrázek 8: Wavelet Coiflet 2

3.3.5 Wavelet Symlet 6

Symlet wavelety jsou konstruovány stejně jako Daubechies wavelety, ale je kladen důraz na co největší symetrii. Značí se Sym N , kde $N \leq 2$. Délka filtru je $2N$ [36].

Vlastnosti:

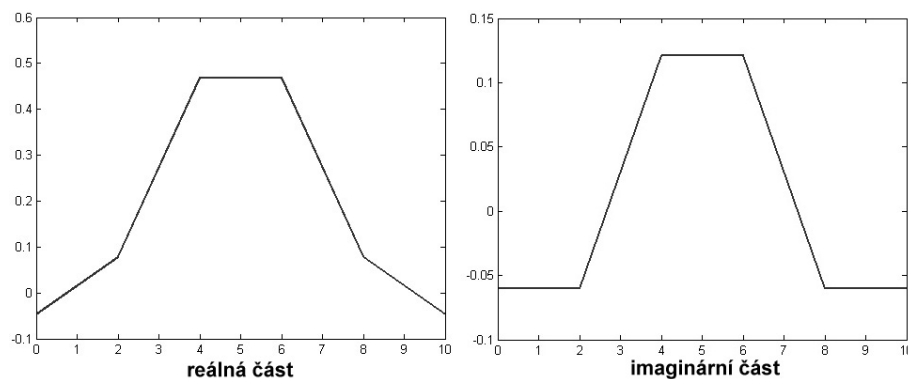
- téměř symetrický,
- má kompaktní nosič,
- vhodný pro DWT,
- ortogonální i biortogonální,
- nemá explicitní vyjádření.

**Obrázek 9:** Wavelet Symlet 6**3.3.6 Komplexní wavelet**

Jako poslední uvedme poněkud odlišný komplexní wavelet, který má reálnou i imaginární složku, jež jsou zobrazeny na obrázku 10. Koeficienty použité pro tento wavelet jsme získali z [9]. Škálovací koeficienty mají podobu

$$\left[-3 - i\sqrt{15}, 5 - i\sqrt{15}, 30 + i2\sqrt{15}, 30 + i2\sqrt{15}, 5 - i\sqrt{15}, -3 - i\sqrt{15} \right] / 64.$$

Jedná se o komplexní, symetrický, ortogonální wavelet nazývaný SCD-6 [9].



Obrázek 10: Komplexní wavelet SCD-6

3.4 Výběr waveletu

Pro výběr toho správného waveletu se lze držet již známých faktů [34]:

- Komplexní wavelety, např. typu Morlet, dobře detekují oscilace, nevhodné jsou pro osamocené singularity.
- Pro detekci singularit a špiček je vhodné používat reálné wavelety s málo oscilacemi.
- Asymetrické wavelety se hodí k detekci změn gradientu.
- Symetrické wavelety nezpůsobují fázový posun mezi špičkou (singularitou, oscilací) v signálu a polohou daného koeficientu při transformaci.
- K současné detekci amplitudy a fáze se používá komplexní wavelet.

Lze se držet také následujícího postupu [9]. Necht' $B = (W_1, W_2, \dots, W_k)$ je banka ortogonálních waveletů a $X(M \times N)$ je matice vstupního signálu (obrazu). Výběr optimálního waveletu pro vybraná data X_i je založen na minimalizaci entropického funkcionálu $B_i^{opt} = \arg \min_B E(X_i, B)$:

$$E(X_i, B) = - \sum_j p_j^{(i)} \cdot \ln p_j^{(i)}, \quad (16)$$

kde $p_j^{(i)} = |a_j^{(i)}|^2 / \|a^{(i)}\|_{l_2}^2$, $\|a^{(i)}\|_{l_2}^2 = \sum_{(j)} |a_j^{(i)}|^2$, $a_j^{(i)}$ je prvkem vektoru waveletových koeficientů, spočítaných během zpracování vektoru X_i v bázi W_l , $l = 1, 2, \dots, k$.

Spočítali jsme pro jednotlivé wavelety dle (16) jejich entropii (nazývá se Shannonova entropie) pro všechny stupně dekompozice, kterých je pro obrázek 512×512 px devět. Výsledek lze vidět v tabulce 1, kde minimální hodnota entropie pro daný wavelet je zvýrazněna. Nejlépe je na tom komplexní wavelet SCD-6. Nejhůře dopadly vlnky Rbio 4.4, která má dokonce zvyšující se entropii pro jednotlivé stupně a také očekávaná Haarova vlnka.

| Shannonova entropie s vlnkami | | | | | | | | |
|-------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------|
| Stupeň | Haar | Daub 4 | Daub 8 | Daub 16 | Rbio 4.4 | Coif 2 | Sym 6 | SCD-6 |
| 1. | 10,8669 | 10,8669 | 10,8671 | 10,8672 | 10,8704 | 10,8668 | 10,8666 | 10,1745 - 0,0000i |
| 2. | 10,8668 | 10,8667 | 10,8670 | 10,8670 | 10,8741 | 10,8666 | 10,8664 | 9,4825 + 0,0000i |
| 3. | 10,8667 | 10,8666 | 10,8669 | 10,8669 | 10,8798 | 10,8664 | 10,8662 | 8,7914 + 0,0001i |
| 4. | 10,8666 | 10,8666 | 10,8668 | 10,8669 | 10,8879 | 10,8662 | 10,8659 | 8,1024 + 0,0003i |
| 5. | 10,8666 | 10,8665 | 10,8668 | 10,8667 | 10,8983 | 10,8660 | 10,8657 | 7,4179 + 0,0005i |
| 6. | 10,8666 | 10,8664 | 10,8667 | 10,8666 | 10,9047 | 10,8656 | 10,8651 | 6,7447 - 0,0000i |
| 7. | 10,8665 | 10,8663 | 10,8665 | 10,8658 | 10,9083 | 10,8646 | 10,8637 | 6,0891 + 0,0042i |
| 8. | 10,8665 | 10,8662 | 10,8657 | 10,8645 | 10,9134 | 10,8629 | 10,8611 | 5,5028 + 0,0219i |
| 9. | 10,8665 | 10,8661 | 10,8647 | 10,8620 | 10,9105 | 10,8593 | 10,8558 | 5,0593 - 0,0064i |

Tabulka 1: Hodnoty Shannonovy entropie

4 Metrika k určování kvality obrazu

Při zpracovávání obrazu je velmi důležité umět posoudit výsledek zpracování. V některých případech si lze vystačit s vizuálním posouzením kvality zpracovaného obrazu (subjektivní posouzení), ale to pouze v případech, kdy rozdíly v obrazech jsou značné. Zavádí se proto metoda pro objektivní posouzení kvality, kterou využijeme ve všech oblastech zpracování obrazu jako metriku.

4.1 Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)

Mezi nejjednodušší metody k posouzení kvality obrazu patří metoda **PSNR** - *špičkový odstup signál/šum*. Tato metoda nevyužívá k posouzení kvality vlastnosti lidského oka. K výpočtu je zapotřebí mít původní (nezkreslený) obraz. Kvůli širokému spektru mnoha signálů se udává v logaritmickém měřítku a jednotkou je decibel [dB]. Rozmezí hodnot pro 8 bitový signál bývá typicky 20 - 40 dB, kde vyšší hodnota značí vyšší kvalitu obrazu. Pro 16 bitová data pak 60 - 80 dB. Při výpočtu využívá tzv. *střední kvadratickou chybu*, která se značí **MSE** (Mean Squared Error) a pro dvourozměrný obrazový signál je definována jako [24]

$$\text{MSE} = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\mathbf{X}(i, j) - \mathbf{Y}(i, j))^2,$$

kde $\mathbf{X}(i, j)$ a $\mathbf{Y}(i, j)$ jsou hodnoty pixelů původního a zkoumaného obrazu a M, N jsou rozměry těchto obrazů. Hodnota PSNR se pak vypočítá [24]

$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\text{MAX}^2}{\text{MSE}} \right),$$

kde MAX značí maximální hodnotu pixelu, tj. pro 8 bitový signál hodnotu 255. Existují i další metriky, více objektivnější, které lze rovněž nalézt v [24], my však budeme používat pouze metriku PSNR.

5 Aplikace waveletové transformace

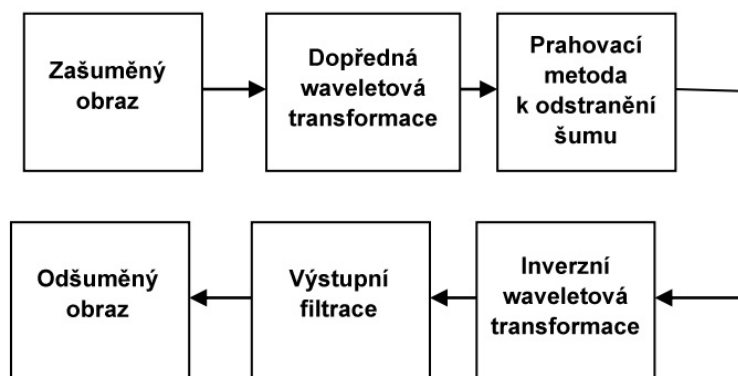
V předchozích kapitolách jsme si představili teorii waveletové transformace. Ukažme nyní, jak ji lze využít pro různé aplikace v digitálním zpracování obrazu. Následující podkapitoly obsahují podrobnosti o jednotlivých aplikacích. Mezi ně patří:

- odstraňování šumu v obraze,
- komprese obrazu,
- úprava kontrastu v obraze,
- rozpoznávání vzorů v obraze.

Přejdeme tedy k jednotlivým částem.

5.1 Odstraňování obrazového šumu

Každý digitální obraz je do jisté míry postihnut šumem. Ve většině případů se jedná o nežádoucí jev, který je nutno odstranit. Princip odstraňování šumu pomocí waveletové transformace je znázorněn na obrázku 11. Nejprve se provede dopředná waveletová transformace obrazu, pak se pomocí vhodné prahovací metody vynulují koeficienty představující šum a nakonec se obraz zpětně zrekonstruuje pomocí inverzní waveletové transformace, čímž získáme odšuměný obraz.



Obrázek 11: Blokové schéma principu odšumování s využitím waveletovy transformace

Pojem prahování (anglicky thresholding) je obecně řečeno modifikace hodnot, které jsou nižší či vyšší než zvolený práh. Rozlišujeme dva typy prahování, které určují, jakým způsobem se budou, v našem případě koeficienty po waveletové transformaci, upravovat. A těmi jsou

- tvrdé prahování,
- měkké prahování.

V případě tvrdého prahování (angl. hard thresholding) jsou všechny hodnoty, které jsou nižší nebo rovny nastavenému prahu vynulovány. Ostatní hodnoty zůstávají stejné. Přesněji je tento proces vyjádřen následující funkcí

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| \leq T, \\ x & \text{pro } |x| > T. \end{cases} \quad (17)$$

Naproti tomu měkké prahování (angl. soft thresholding), kde hodnoty, které u tvrdého prahování zůstaly nezměny, jsou nyní zvětšeny, respektive zmenšeny o daný práh. Náznornější vysvětlení dává tato funkce

$$\eta(x) = \begin{cases} x - T & \text{pro } x > T, \\ 0 & \text{pro } |x| \leq T, \\ x + T & \text{pro } x < -T. \end{cases} \quad (18)$$

Nyní přejdeme k metodám prahování, které nám určují, jaký práh je nejvhodnější pro daný obraz. Jinými slovy jsou tyto metody adaptivní. V práci se seznámíme se třemi metodami prahování a těmi jsou

- VisuShrink
- SureShrink
- BayesShrink

Než si popíšeme jednotlivé metody prahování, je vhodné si zavést tzv. *univerzální práh*, který je zároveň jednou z nejjednodušších metod prahování. Práh T se touto metodou spočte dle vztahu

$$T = \sigma \sqrt{2 \log N}, \quad (19)$$

kde N je délka signálu, σ je směrodatná odchylka šumu.

5.1.1 VisuShrink

První z metod prahování je metoda *VisuShrink*. Jedná se o nejjednodušší metodu k odstraňování šumu, se kterou budeme pracovat. Tato metoda byla poprvé představena matematiky Donoho a Johnstone v roce 1995 [4]. Nevýhodou této metody je, že nedokáže odstranit šum typu *speckle* [5], poradí si pouze s aditivním šumem.

K metodě VisuShrink je potřeba odhadnout směrodatnou odchylku šumu σ . To lze provést s využitím detailních koeficientů waveletové transformace

$$\sigma = \frac{\text{median}(\{|g_{j-1,k}| : k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1\})}{0.6745}, \quad (20)$$

kde $g_{j-1,k}$ představuje detailní koeficienty waveletové transformace. Využívají se právě tyto koeficienty, protože je zde nejvíce zastoupen šum. Takto odhadnutá směrodatná odchylka se využije v univerzálním prahu (19), čímž získáme práh pro metodu VisuShrink. Při samotném prahování se projedou pouze detailní koeficienty, škálovací koeficienty zůstanou nezměněny.

5.1.2 SureShrink

Tato metoda je podobná metodě VisuShrink, liší se v tom, že práh se volí pro každou úroveň a část dekompozice zvlášť. Pro směrodatnou odchylku šumu se použije opět vztah (20) s tím rozdílem, že se budou postupně uplatňovat detailní koeficienty po waveletové transformaci (HHx, HLx, LHx koeficienty). Zvolený práh je dán kombinací univerzálního prahu (19) a tzv. Stein's Unbiased Risk Estimator (SURE) prahu (viz [6]). Hodnota výsledného prahu T je pak dána

$$T = \min \left(S, \sigma \sqrt{2 \log N} \right),$$

kde S je hodnota SURE prahu, N je délka signálu a σ je směrodatná odchylka šumu.

5.1.3 BayesShrink

Model této metody [7] může být vyjádřen jako

$$Y = X + V,$$

kde Y představuje waveletovou transformaci zašuměného obrazu, X je waveletová transformace původního obrazu a V značí waveletovou transformaci zašuměných částí s normálním rozdělením $N(0, \sigma_v^2)$. Neboť X a V jsou vzájemně nezávislé, odchylky σ_y^2 , σ_x^2 a σ_v^2 z y , x a v jsou dány

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_v^2.$$

V [8] bylo ukázáno, že odchylka šumu σ_v^2 může být odhadnuta z první dekompoziční úrovně z koeficientů HH, resp. HH₁ jako

$$\sigma_v^2 = \left[\frac{\text{median}(|HH_1|)}{0.6745} \right]^2.$$

BayesShrink prahování je stejně jako předchozí metody adaptivní, určuje práh pro každé subpásmo zvlášť, stejně jako metoda SureShrink. Výsledný práh je stanoven předpisem

$$T = \begin{cases} \frac{\sigma_v^2}{\sigma_x} & \text{pro } \sigma_v^2 < \sigma_y^2, \\ \max\{|A_m|\} & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\sigma_x = \sqrt{\max(\sigma_y^2 - \sigma_v^2, 0)}$ a A_m jsou jednotlivé waveletovské koeficienty dle subpásma, v jakém je práh počítán.

5.1.4 Mazání singulárních čísel v SVD rozkladu matice paketového rozkladu

Poslední metodou odšumování obrazu (viz [9]), kterou nelze přímo zařadit mezi metody prahovací, jelikož se skládá z vícero kroků. Skládá se tedy z těchto kroků:

- Jelikož obrazový signál je dvoudimenzionální a pro další práci se signálem potřebujeme signál jednorozměrný, prvním krokem je "vyskládat" všechny řádky za sebe do jednoho jednorozměrného vektoru. Výsledný vektor je sice velmi velký, tudíž je proces výpočetně náročnější, ale umožní to jednodušší práci s ním.
- Výběr optimálního waveletu a waveletové báze B^{opt} na základě minimální entropie:

$$B^{opt} = \arg \min_B E(X, B)$$

- Po waveletové transformaci do maximální možné úrovně dekompozice se vybere optimální hladina na základě předchozího kroku a sestaví se matice paketového rozkladu.
- Jakmile máme matici paketového rozkladu z obrazového vektoru, provedeme SVD rozklad (např. viz [10]) této matice. Seřadíme si podle velikosti všechna singulární čísla a od nejmenšího postupně nulujeme. Poté zpětně zrekonstruujeme matici paketového rozkladu po odmazání singulárních čísel.
- Provedeme zpětnou waveletovou transformaci z matice paketového rozkladu a z výsledného jednorozměrného signálu, nyní už odšuměného, vyskládáme výsledný dvourozměrný obraz.

5.1.5 Porovnání metod

Pro tuto kapitolu o odšumování obrazu jsme pro testování používali obrázek Lenny o velikosti 2048×2048 px. Jako první jsme zmiňovali, rozdíl mezi tvrdým a měkkým prahováním. Měkké prahování poskytuje ostřejší výsledky (více zachovává hrany) v porovnání s prahováním tvrdým, kde obraz více vyhladí, a tedy i nechtěné artefakty v obraze. Rozdíly nejsou značné, dokud se nepoužije příliš velký stupeň dekompozice (viz obrázek 12), proto zvolené prahování závisí na dané aplikaci. Pro další systematické



Obrázek 12: Rozdíl mezi měkkým (vlevo) a tvrdým (vpravo) prahováním po čtyřech (nahore) a šesti (dole) stupních dekompozice

porovnání výsledků budeme používat pouze tvrdý typ prahování, neboť poskytuje lepší výsledek, jak lze i vidět z hodnot PSNR z obrázku 12.

Dále jsme si představili tři metody prahování. Nejprve ukažme (obrázek 13) na nejjednodušší Haarově vlnce, že není dobré volit příliš vysoký stupeň dekompozice. Jak lze vidět z obrázku 13 a také z experimentů, je vhodné volit mezi druhým až čtvrtým stupněm dekompozice. V případě vyššího stupně dochází ke značné degradaci obrazu a hodnota PSNR se snižuje. V dalším porovnávání proto využijeme třetí stupeň dekompozice.



Obrázek 13: Porovnání několika stupňů dekompozice s Haarovou vlnkou

Nyní ve zbytku této kapitoly porovnáme jednotlivé metody v závislosti na použité vlnce (waveletu).

Graficky znázorněné porovnání můžeme vidět na obrázku 14. Porovnávali jsme metody VisuShrink, SureShrink, BayesShrink pro různé typy vlnek. Konkrétně vlnky typu Haar, Daubechies 4, Daubechies 8 a Daubechies 16. Použili jsme třetí stupeň dekompozice a tvrdý typ prahování. Hodnoty PSNR jsou zobrazeny v levém dolním rohu každého obrazu. Znovu připomeňme, že metody jsou adaptivní, tudíž práh se volí automaticky na základě vstupního obrazu. Nejostřejší výsledky podává, nehledě na použitou vlnku, metoda BayesShrink. Naopak nejrozostřenější výsledky metoda SureShrink.

Haarova vlnka v porovnání s ostatními vlnkami typu Daubechies podává poněkud degradovaný obraz. Haarova vlnka je nejjednodušší vlnkou vůbec, tudíž je očekávatelné, že nebude tou nejlepší volbou v odšumování obrazu. Dle hodnot PSNR, Haarova vlnka podává také nejhorší výsledek. Přijatelný výsledek lze vidět pouze u metody BayesShrink. Tato metoda však zanechává bílé a černé tečky v obraze a v případě Haarovy vlnky jsou tyto tečky nejviditelnější. Jak jsme již řekli, metoda BayesShrink poskytuje nejostřejší výsledek, ale ten je za cenu mírného výskytu šumu. U metod VisuShrink a SureShrink lze považovat za nejlepší vlnku Daubechies 4. Od vlnky Daubechies 8 se v obraze začínají vyskytovat artefakty v podobě zdvojení v místech hran. Nejhorší vizuální výsledek je u metody SureShrink s vlnkou Daubechies 16, kde došlo ke značnému přehlazení obrazu, i když hrany se snaží zůstat zachovány, jsou však zdvojeny kvůli artefaktům v obraze. Porovnáme-li si však hodnoty PSNR, tak zjistíme, že se hodnoty od vizuálního posouzení kvality někdy liší. Například artefakty v obraze mohou být velmi nepříjemné a přesto hodnoty PSNR vyšly nejlépe. Je proto nutné, být při posuzování kvality obezřetný. Závěrem lze říct, že pokud hledáme kompromis mezi tím, jakou vlnku zvolit pro odšumování obrazu, tak správnou volbou se jeví vlnka Daubechies 4.



Obrázek 14: Porovnání jednotlivých metod s různými druhy vlnek

Podíváme-li se na výsledek porovnání poslední metody pro odstraňování šumu pomocí SVD rozkladu matice paketového rozkladu, kde jsme opět použili Haarovu, Daubechies 4, Daubechies 8 a Daubechies 16 vlnku. Využili jsme opět obrázek Lenny o velikosti 2048×2048 px. Po experimentech, nejlepší výsledek jsme dostali, pokud jsme vynulovali

singulární čísla menší než 9. Menší hodnota než 9 obraz téměř nezměnila, větší hodnota naopak obraz hodně rozmazala. Grafické znázornění lze vidět na obrázku 15. V případě Haarovy vlnky došlo k většímu rozmazání obrazu než u zbylých. Rozdíly mezi všemi vlnkami jsou ale velmi malé, o čemž vypovídá i hodnota PSNR (zobrazená v levém spodním okraji obrazů na obrázku 15). Počty vymazaných singulárních čísel pro použité vlnky jsou:

- Haar: 1972 z 2048,
- Daubechies 4: 1972 z 2048,
- Daubechies 8: 1973 z 2048,
- Daubechies 16: 1973 z 2048.



Obrázek 15: Porovnání metody pro odstraňování šumu pomocí SVD rozkladu matice paketového rozkladu

Ukázali jsme další možnou metodu pro odstraňování obrazového šumu, která však neposkytuje tak dobrý výsledek jako metody využívající prahování.

5.2 Komprese obrazu

Základní myšlenkou komprese obrazu je zmenšit velikost datového obrazového souboru při co největším zachování kvality původního obrazu. Komprese může být ztrátová i bezztrátová. Pro účel komprese obrazu se ve většině případů používá ztrátová, kde se využívá nedokonalosti lidského oka (snížení barev, redukce detailů). Jelikož my pro jednoduchost pracujeme s černobílými obrazy, bude nás zajímat komprese obrazu pomocí redukce detailů.

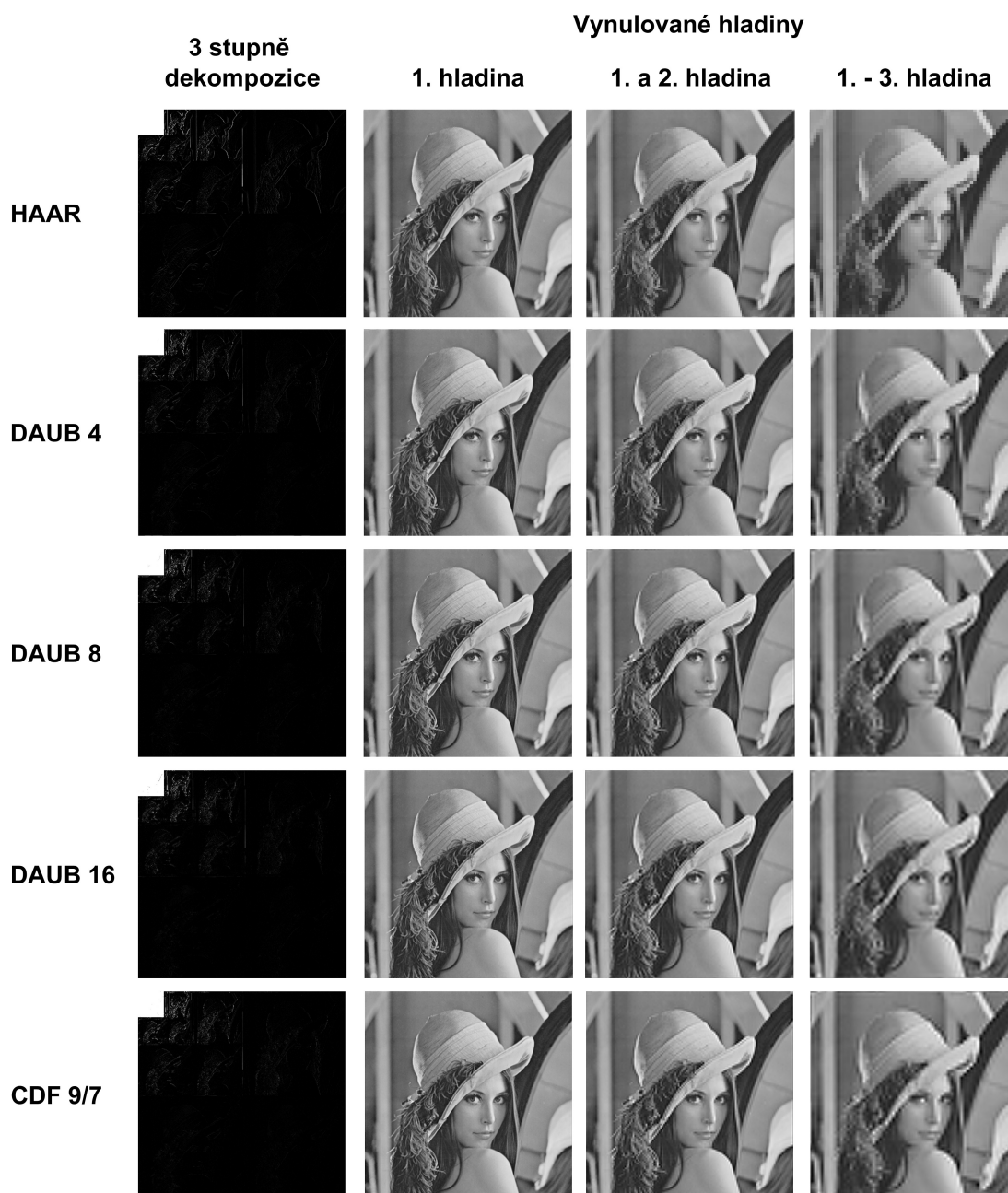
Základním ukazatelem účinnosti komprese je tzv. **kompresní poměr**, neboli podíl nekomprimovaných dat ku komprimovaným datům. Snažíme se tedy o co nejvyšší kompresní poměr při zachování dostatečné kvality obrazu.

Waveletová transformace je skvělý nástroj ke kompresi obrazu, neboť umožňuje obrazový signál rozložit do různých frekvenčních hladin (nizké a vysoké frekvence) a podle potřeby některé frekvence obrazu (vysoké = detaily) eliminovat.

V rámci experimentu jsme vzali obrázek Lenny o velikosti 512×512 px, provedli dopřednou waveletovou transformaci na tři hladiny (stupně dekompozice) a následně pro jednotlivé vlnky zkoušeli nulovat jednotlivé hladiny (pouze detailní koeficienty) a zkoumali, jak tím bude výsledný obraz po zpětné waveletové transformaci ovlivněn. Výsledek lze vidět na obrázku 17. Pro účel komprese nás zajímá většinou pouze vynulovaný první stupeň dekompozice (koeficienty HH_1 , LH_1 , HL_1), který poskytuje poměrně slušný výsledek, když uvážíme, že tímto ihned zkrátíme paměť nutnou k uložení obrazu na čtvrtinu. Alternativou by mohlo být, odmazat pouze koeficienty HH_1 a LH_1 (viz obrázek 16), pokud by ztráta detailů byla nad únosnou mez. Pak by jsme ušetřili polovinu paměti. Vynulovat více než jednu hladinu není příliš vhodné, jelikož tím dojde k příliš velké ztrátě obrazových detailů.



Obrázek 16: Vynulované HH_1 a LH_1 koeficienty s využitím Daubechies 16 vlnkou, PSNR = 87, 4449 dB



Obrázek 17: Porovnání obrazů po vynulování jednotlivých stupňů dekompozice pro různé typy vlnek

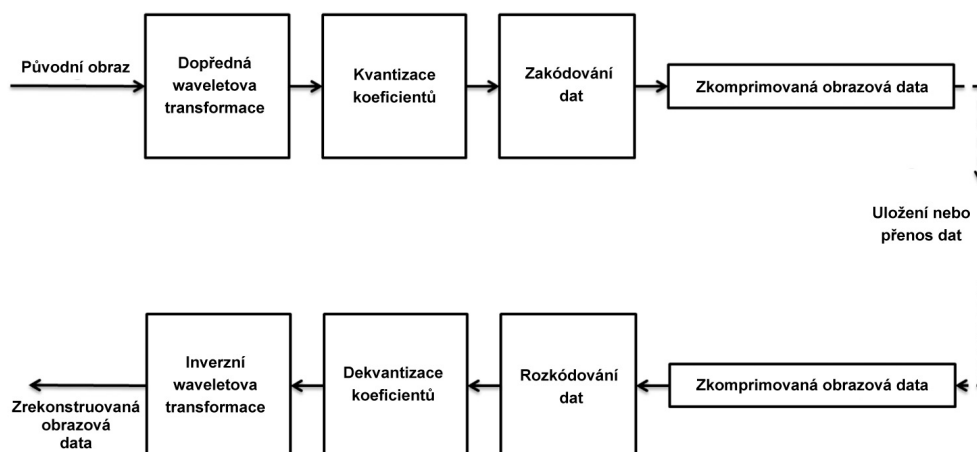
Tabulka 2 zobrazuje spočtené hodnoty PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) pro jednotlivé vlnky v případě vynulování prvního až třetího stupně dekompozice (detailní koeficienty). Čím vyšší je tato hodnota, tím lze kompresi považovat za kvalitnější. Vlnka, která poskytuje nejlepší výsledek je Daubechies 8, popřípadě Daubechies 16. Tyto vlnky při prvním stupni dekompozice pouze jemně rozloží detaily do nenulových ko-

eficientů. Ostatní koeficienty jsou z velké části rovny nule (nebo jsou velmi blízko nule, tudíž je lze zanedbat). Díky tomu nedojde k degradaci obrazu odmazáním důležitých detailů v obraze.

| PSNR [dB] | | | |
|-----------|----------------|----------------|----------------|
| Vlnka | 1 z 3 | 2 z 3 | 3 z 3 |
| HAAR | 78,9677 | 74,5637 | 71,5531 |
| DAUB 4 | 81,4724 | 76,6105 | 73,0128 |
| DAUB 8 | 82,9228 | 77,0885 | 73,2153 |
| DAUB 16 | 82,8703 | 77,4963 | 73,4292 |
| CDF 9/7 | 82,1918 | 76,9513 | 73,1549 |

Tabulka 2: PSNR hodnoty pro data z obrázku 17

Podotkněme, že jsme doposud na transformovaná obrazová data s vynulovanými koeficienty neaplikovali žádný kompresní algoritmus (bezeztrátový). Provedli jsme pouze část řetězce (viz obrázek 18) při kompresi obrazu. Tato část, kdy nulujeme koeficienty je ztrátová a právě v této části určujeme, jak moc chceme obrazová data zkomprimovat. Poté následuje nějaký vhodný bezeztrátový algoritmus, který má za úkol tyto data ještě více zredukovat, ale tak, aby se dala opět zrekonstruovat.

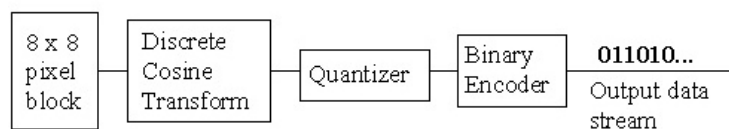


Obrázek 18: Sekvence kroků při typické kompresi obrazu s využitím waveletové transformace

5.2.1 Od JPEG po kompresi JPEG 2000

JPEG standard (Joint Photographic Experts Group) byl vytvořen v roce 1994 jako výsledek procesu, který započal již v roce 1986. Tato skupina odborníků pro zpracování obrazu, nominována Mezinárodní organizací pro normalizaci a významnými společnostmi, pracovala na výrobě tohoto standardu pro spojitě kódování obrazu. Výsledkem byl ztrátový kompresní algoritmus (formát pro uložení obrazových dat), založený na diskrétní kosinové transformaci (DCT). V době svého vzniku byl nejrozšířenějším obrazovým formátem na internetu. Brzy se však ukázalo, že je JPEG nedostatečný pro řadu aplikací. Došlo proto na rozšíření tehdejšího JPEG standardu, to však nebylo dostatečné kvůli problému s vlastnickými právy [23]. Bylo třeba přijít s lepším standardem. DCT nahradila diskrétní waveletová transformace a mohl tak postupně vzniknout nový standard pro kompresi obrazu.

Než přejdeme k novému standardu ukažme ještě, jak vypadá proces [19] při JPEG kompresi, který je zobrazen na obrázku 19. Sestává se z těchto kroků



Obrázek 19: Proces JPEG komprese (převzato z [20])

- Nejprve je třeba obraz předzpracovat. V případě barevného obrazu převést z RGB do YCrCb barevného modelu, tzn. do jasové a dvou chrominačních složek. Barevnostní složky je možno podvzorkovat. Každá z těchto složek se pak zpracovává zvlášť.
- Následně každou složku rozdělit do bloků o velikosti 8×8 pixelů.
- Pro každý blok se provede DCT.
- Koeficienty po DCT jsou dále kvantizovány, tj. vyděleny kvantizační maticí a zaokrouhleny. Kvantizační matice je stejná pro všechny bloky.
- Poté jsou takto upravené koeficienty komprimovány pomocí RLE algoritmu (Run-Length encoding) a zakódovány do sekvence nul a jedniček Huffmannovým kódováním.
- Posledním krokem je buď uložení dat, nebo datový přenos.

V případě dekomprese obrazu je postup opačný. RLE, Huffmannovo kódování a DCT je bezeztrátový proces (stejně jako waveletová transformace). K samotné ztrátě dochází při kvantizaci, kdy se dříve zaokrouhlené koeficienty vynásobí kvantizační maticí.

JPEG standard je stále nejvíce populární formát pro ukládání obrazů na webových serverech. Rozlišení, při kterém je komprimován, je dostatečné pro běžné prohlížení na webu.

Avšak lidé, kteří pracují s digitálními obrazy, identifikovali mnoho problémů, v kterých je JPEG nedostatečný. Mezi hlavní nevýhody ([21]) JPEG standardu patří

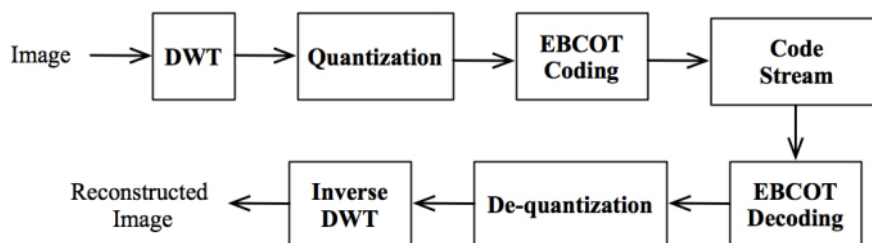
- **Neumožňuje bezeztrátovou kompresi** - pro mnoho aplikací je ztráta informace nepřijatelná.
- **Oddělení obrazů** - rozdělení obrazu na bloky 8×8 znamená, že jsou zpracovány nezávisle na sobě. To je nevýhodné, pokud bychom se snažili využít homogenity oblasti, která je větší než 8×8 pixelů.
- **Vliv bloků** - tím, že je obraz blokově rozdělen, nelze často zajistit hladký přechod mezi bloky v komprimovaném obraze.
- **Vliv hran** - DCT pracuje s kosinovou funkcí a tedy pracuje nejlépe, pokud vstupní data jsou periodická. To však není typická vlastnost v řádcích a sloupcích digitálních obrazů.
- **Globální transformace** - jakákoliv chyba či odchylka ve vstupním obraze se projeví ve výstupním.

Nový standard byl vyvinut stejnou skupinou odborníků jako standard JPEG. Vznikl JPEG 2000. Měl sloužit jako náhrada standardu JPEG, který měl předčít v mnoha vlastnostech. Hlavní výhody ([21]) JPEG 2000 vůči JPEG jsou

- **Lepší kompresní poměr** - JPEG 2000 produkuje vysoce kvalitní obrazy při nižším bitovém toku (0,025 bpp a nižším) než JPEG.
- **Progresivní přenos signálu** - JPEG 2000 dokáže zrekonstruovat digitální obrazy (při zvyšující míře rozlišení), jak jsou data přijímány prohlížečem.
- **Tiling** - umožňuje uživateli rozdělit obraz do bloků, které jsou dále samostatně zpracovávány, stejně jako v JPEG. Toto rozdělení (tiling) nemusí však být jen 8×8 pixelů.
- **Oblasti zájmu (ROI)** - uživatel může indentifikovat tyto oblasti, které jsou pak zakódovány s větším rozlišením než ostatní oblasti, např. obličej.
- **Větší velikost obrazu** - JPEG standard umožňuje obrazy do velikosti $64\,000 \times 64\,000$ bodů. JPEG 2000 naproti tomu obrazy až do rozlišení $4\,294\,967\,295 \times 4\,294\,967\,295$ bodů.
- **Vícenásobné kanály** - JPEG standard podporuje kompresi tří kanálů (barevné obrazy). JPEG 2000 může podporovat kompresi až 256 kanálů (složek). Tak velké množství složek je běžné pro satelitní data.

Podobně jako JPEG, tak i komprese JPEG 2000 se skládá ze 4 hlavních kroků: přezpracování, transformace, kvantizace, zakódování. Narozdíl od JPEG, kvantizace je volitelná, pokud si uživatel přeje bezeztrátovou kompresi. Místo Huffmanova kódování

je použita nová metoda zvaná *Embedded Block Coding with Optimized Truncation (EBCOT)*. Toto schéma je zobrazeno na obrázku 20 a proces je následující (podrobný popis lze najít v [11])



Obrázek 20: Schéma při JPEG 2000 kompresi (převzato z [12])

- V případě barevného obrazu dojde stejně jako u JPEG komprese k transformaci z RGB do YCrCb barevného modelu, kde každá složka se pak zpracovává zvlášť. V rámci předzpracování je dále třeba vycentrovat intenzity obrazu okolo nuly (pro barevný obraz každou složku zvlášť). To znamená, má-li obraz rozsah intenzit 0 až 255, odečteme od krajních intenzit 127 a obdržíme rozsah -127 až 128. Toto přeskalování je využito ve fázi zakódování, kdy se kvůli charakteru algoritmu tato úprava vyžaduje.
- Obraz je možné volitelně rozdělit na tzv. dlaždice (tiling). Jde o obdélníkové oblasti volitelné velikosti, stejné pro celý obraz, které jsou dále zpracovávány zvlášť. Volba příliš velkého počtu dlaždic vede k nechtěnému efektu vzniku artefaktů v obraze, tak jak tomu je u JPEG standardu. Máme-li vstupní obraz příliš velký, volba vhodného počtu dlaždic umožní rychlejší výpočet a tím se zrychlí celý proces komprese.
- Hlavní změnou v JPEG 2000 je, že využívá diskrétní waveletovou transformaci místo DCT. Pokud požadujeme ztrátovou kompresi, tak použijeme DWT s vlnkou CDF 9/7. Pro bezztrátovou se používá biortogonální vlnka CDF 5/3. V obou případech se provedou 2 - 3 stupně dekompozice.
- Dalším krokem je kvantizace koeficientů (viz [22]). Po třech stupních dekompozice máme daný obraz či dlaždici rozdělenou celkem do 10-ti bloků, tj. HH₁, HL₁, LH₁, HH₂, HL₂, LH₂, HH₃, HL₃, LH₃ a aproximační koeficienty LL₃. Každý z těchto bloků je kvantizován zvlášť. Hodnoty v každém bloku jsou vynulovány nebo přiblíženy k nule a převedeny na celé číslo dle předpisu

$$q(t) = \text{sgn}(t) \cdot \left\lfloor \frac{|t|}{d} \right\rfloor.$$

Pro každý blok je počítán jiný kvantizační krok τ vztahem

$$\tau = 2^{R-c+i} \left(1 + \frac{f}{2^{11}} \right),$$

kde R je počet bitů reprezentující intenzity původního obrazu, i je stupeň dekompozice DWT a c, f jsou počty bitů potřebných k reprezentaci exponentu a mantisy z aproximačních koeficientů.

Pro aproximační koeficienty volíme kvantizační krok $d = \tau/2^i = \tau/8$, pro koeficienty HL a LH volíme $d = \tau/2^{k-1}$ a pro HH koeficienty $d = \tau/2^{k-2}$, je-li $k = 1, \dots, i$.

- Obraz či jednotlivé dlaždice po kvantizaci jsou dále rozděleny do tzv. kódových bloků. Tyto bloky jsou stejné velikosti (vyjma konců intervalu) a jsou formovány do jedné bitové roviny a to od nejvýznamnějšího bitu (MSB) po nejméně významný bit (LSB) ([12]). Tento způsob kódování se nazývá *Embedded Block Coding with Optimized Truncation*. Výsledkem je bitový tok, který je formován do paketů, z nichž každý představuje přírůstek v kvalitě odpovídající jedné úrovni rozlišení. Shromážděním všech paketů do vrstvy umožníme postupný růst kvality při dekompresi obrazu ([19]).

5.2.1.1 Porovnání JPEG a JPEG 2000

Porovnejme nyní kvalitu komprese standardu JPEG 2000 s tradičním JPEG standardem. Využili jsme freeware software *JPEG 2000 Compressor*. Obraz pro testování je standardní nezkomprimovaný snímek "Lenna.bmp" ve stupních šedi (512×512 px). Původní velikost obrazu byla 257 kB, po komprimaci 10,5 kB, tj. kompresní poměr $\approx 24 : 1$. Při tak vysokém kompresním poměru došlo v případě JPEG ke značné degradaci obrazu - viditelné artefakty a bloky 8×8 . Pro lepší porovnání jsme vypočítali špičkový odstup signál/šum (PSNR) pro oba obrazy. PSNR hodnota pro JPEG 2000 a JPEG je 39,1347 dB a 36,4934 dB pro 8 bitová obrazová data. Je tedy zřejmé, že JPEG 2000 poskytl mnohem kvalitnější výsledek. Porovnání lze vidět na obrázku 21.



Obrázek 21: Porovnání zkomprimovaného obrazu pomocí JPEG 2000 a JPEG standardu

5.2.1.2 Aplikace JPEG 2000

Na závěr k standardu JPEG 2000 uvedme některé jeho nejznámější aplikace [13]

- **Komprese otisků prstů FBI** - USA archivovala otisky prstů od roku 1924. Sada otisků jednoho člověka zabrala 10 MB paměti. Celkové počet záznamů činil přes 200 miliónů sad. Bylo proto nutné tyto sady zkomprimovat, proto v roce 2010 vyvinuli systém pro archivaci otisků s hustotou 1000 ppi využívající kompresi JPEG 2000 (viz [14]).
- **Archivy a databáze** - JPEG 2000 je obecně výborný formát k archivaci. Každý soubor může obsahovat rozsáhlá metadata s klíčovými slovy. Vyhledání v databázi či efektivní roztřídění je pak snadné.
- **Lékařské snímky** - Kvalita zde hraje podstatnou roli, degradace vlivem komprese by mohla vést ke špatné diagnóze. Nekomprimované snímky jsou obvykle obrovské soubory, které nelze z hlediska paměti v této formě ukládat. Může se jednat například o rentgenové, CT snímky.
- **Geografické informační systémy** - umožňují prohlížení a analýzu několika vrstev prostorově souvisejících informací, např. cest, vegetací, inženýrských sítí. Také mapování, letadlové snímky, satelitní snímky Země. Mnoho takto zaznamenaných dat je obrovských rozměrů, má bitovou hloubku více než 8 bitů na pásmo. JPEG standard proto přestal být výhodný pro ukládání dat a nahradil ho JPEG 2000.

- **Záznam/sken dokumentů** - vždycky jde o kompromis mezi kvalitou a kompresí. Mnoho dokumentů obsahuje pouze text a standard JPEG má nepříjemnou vlastnost, že produkuje při velkém kompresním poměru artefakty okolo hran. To může způsobit špatnou čitelnost textu (splnutí jednotlivých písmen). Tento problém JPEG 2000 odstranil.

Kompresní poměr, který se použije ke kompresi obrazových dat, vždy záleží na konkrétních datech. Jiný poměr zvolíme v případě lékařských snímků či obrazů pro velkoformátový tisk, než pro běžná data, kde ztráta informace nehraje velkou roli.

5.2.1.3 Nevýhody JPEG 2000

JPEG 2000 je velice efektivní kompresní algoritmus, původně vyvinutý pro internet, aby nahradil tehdejší JPEG standard. Má však i své nevýhody [15]. Mezi ně patří

- **Kompatibilita se staršími programy** - pouze novější nebo speciální programy a aplikace umí pracovat s JPEG 2000.
- **Šířitelnost** - JPEG 2000 měl nahradit JPEG, ale nestalo se tak. Při distribuci na internetu je malá šance, že si běžný uživatel data zobrazí.
- **Paměťová náročnost** - ke zkomprimování dat je potřeba hodně paměti nebo naopak je to časově náročný proces.
- **Ztráta detailů** - při vysokých kompresních poměrech nad 25:1, JPEG 2000 produkuje méně bloků v obraze v porovnání s tradičním JPEG, ale na druhou stranu se obraz vyhladí a přijdeme tím o cenné detaily v obraze. Příliš velká komprese proto není výhodná.

5.2.2 Komprese EZW

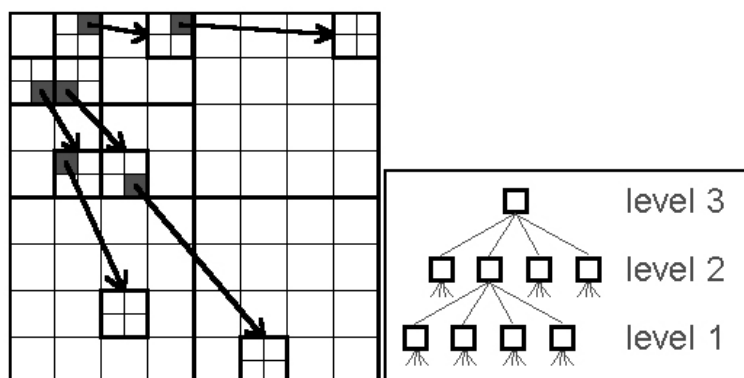
EZW (Embedded Zerotree Wavelet) kódování je speciálně navrženo pro použití s waveletovou transformací. Původně bylo určeno pro práci s obrazy (dvourozměrné signály), ale může být použito i na signálech jiných rozměrů. Je založeno na progresivní (postupné) kompresi obrazu do datového toku se zvyšující přesností. To znamená, že čím více bitů přidáme do datového toku, tím více detailů bude dekodovaný obraz obsahovat. Následující text je čerpán z [17].

EZW kódování je založeno na dvou pozorováních:

1. Je-li obraz transformován waveletovou transformací, energie v subpásmech se snižuje, jak měřítko klesá (nízké měřítko znamená vysoké rozlišení). Tedy waveletovské koeficienty budou menší ve vyšších subpásmech než v těch nižších. Tím se ukazuje, že progresivní kódování je přirozená volba pro kompresi obrazů po waveletové transformaci, když vyšší subpásma pouze přidají více detailů do dekodovaného obrazu.
2. Velké waveletovské koeficienty jsou mnohem důležitější než malé.

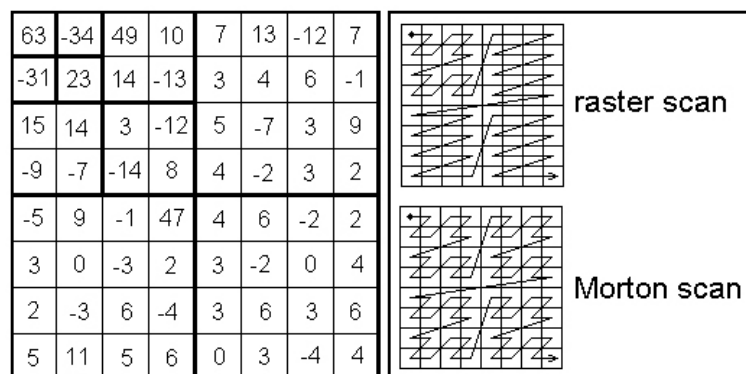
Tyto pozorování jsou využívány při kódování waveletovských koeficientů v sestupném pořadí, v několika průchodech. Pro každý průchod je vybrán práh, s kterým jsou všechny koeficienty porovnávány. Pokud je waveletovský koeficient větší než práh, je zakódován a odstraněn z obrazu. Pokud je menší, tak je ponechán pro další průchody. Pokud byly všechny koeficienty projety, práh se sníží a obraz se prochází znovu k přidání dalších detailů ke kódovanému obrazu. Tento proces je opakován, dokud všechny waveletovské koeficienty nejsou zakódovány.

Podstata je nyní v tom, využít závislosti mezi waveletovskými koeficienty, napříč různými měřítky, k efektivnímu zakódování velkých částí obrazu. Po waveletové transformaci lze obraz reprezentovat pomocí stromové struktury, kvůli podvzorkování použité v transformaci. Lze si proto představit, že koeficient v nízkém subpásmu má v dalším vyšším subpásmu čtyři potomky (viz obrázek 22). Každý z těchto čtyřech potomků má další čtyři potomky ve vyšším subpásmu. Máme tak quad-tree (4-strom) - každý kořen má čtyři listy. Nyní můžeme definovat pojem *zerotree*. Zerotree je 4-strom, jehož všechny uzly jsou menší nebo rovny kořenu. Strom je kódován jediným symbolem a rekonstruován dekodérem jako 4-strom vyplněný nulami. Kořen navíc musí být menší než práh, s nímž jsou waveletovské koeficienty aktuálně porovnávány. Nyní, když je obraz procházen v předdefinovaném pořadí, jdoucí od vysokého měřítka k nízkému, mnoho pozic je implicitně kódováno s využitím zerotree symbolů. Cenou za to je nutnost přidávání zerotree symbolů do kódové abecedy.



Obrázek 22: Stromová reprezentace obrazu pro EZW kódování (převzato z [17])

Pořadí v jakém jsou koeficienty kódovány je nazýván jako tzv. *Mortonův rozklad* (Morton scan order), který je zobrazen na obrázku 23 vpravo dole. Koeficienty v levé části obrázku 23 by byly procházeny v následujícím pořadí: 63, -34, -31, 23, 49, 10, 14, -13, 15, 14, ... Existuje i tzv. *raster scan*, zobrazen na obrázku 23 vpravo nahoře, ale ten se tak často nepoužívá.



Obrázek 23: Průchod obrazem pomocí rastrového skenu a Mortonova rozkladu (převzato z [17])

Podrobnější vysvětlení algoritmu lze najít např. v [16] nebo [17].

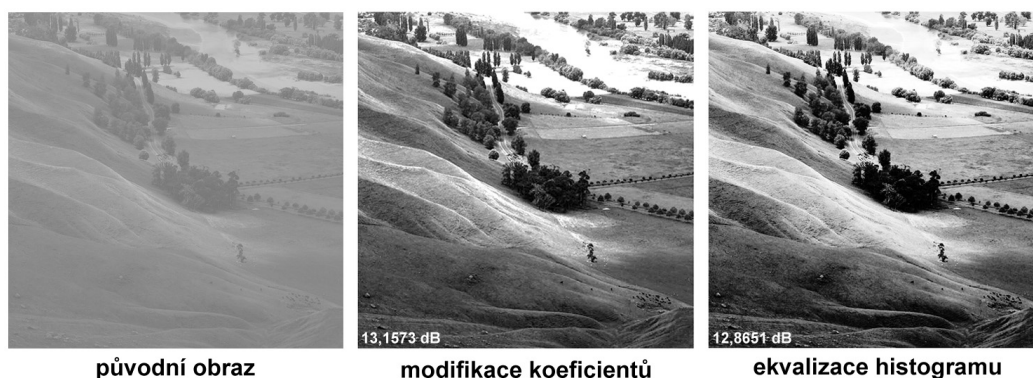
Na závěr nutno podotknout, že EZW kódování ve skutečnosti žádnou kompresi obrazu neprovádí. Pouze přeuspořádá waveletovské koeficienty takovým způsobem, že mohou být dále zkomprimovány velmi efektivně. Je proto nutné, aby za EZW kódováním následoval kodér symbolů, například lze využít aritmetického kódování ([18]). Po kompresi s EZW kódováním dostaneme datový tok, obsahující bezeztrátově zkomprimované koeficienty po waveletové transformaci se zvyšující se přesností (postupné přidávání detailů). Pak stačí pouze tento datový tok v kterémkoliv místě useknout, např. dle požadované velikosti obrazového souboru.

5.3 Úprava kontrastu

Další ze zajímavých aplikací waveletové transformace je úprava kontrastu (angl. image enhancement), v doslovném překladu vylepšení obrazu. Jsou spousty situací, kdy nemáme k dispozici příliš dokonalý, výrazný, kontrastní snímek, ať už se jedná o běžnou fotografii, letecký snímek nebo obrazový výstup z lékařského přístroje. Takový obraz obsahuje příliš mnoho stupní šedi a říkáme, že je tzv. plochý. My se zaměříme hlavně na problém medicínských obrazů. Může se jednat například o rentgenové nebo mamografické snímky. Mamografické snímky normálně zobrazují pouze malé procento informace, které mamograf detekoval. To kvůli malému rozdílu v útlumu při průchodu rentgenovým zářením mezi normální a zhoubnou tkání [25]. Tento fakt činí detekci malých zhoubných nádorů obtížnou. Jedním z ukazatelů, že se jedná o zhoubnou tkáň, jsou drobné tečky v obraze, tzv. mikrokalcifikáty. Digitální zpracování medicínských dat využívá různé techniky k vylepšení (úpravě kontrastu) těchto snímků, aby se včas odhalil případný nádor, který by jinak nebyl zřejmý a pomohl onkologovi v dalším rozhodování. Mezi nejznámější metody úpravy kontrastu patří zejména:

- Ekvalizace histogramu
- Lineární modifikace waveletovských koeficientů
- Nelineární modifikace waveletovských koeficientů

Hlavní nevýhodou použití ekvalizace histogramu je, že se bere obraz jako celek a zvýrazní se veškerá data v obraze, tedy i šum. To je zásadní nevýhoda. Výsledkem je více kontrastní snímek, ale šum může být zvýrazněn natolik, že znemožní následnou identifikaci v obraze. V mamografii je podstatné vylepšit mamografické prvky, zatímco nebude zvýrazněn obrazový šum. To je poměrně komplikované, protože není snadné odlišit šum od důležitých prvků v původním obraze. Je proto nutné zvolit vhodné vyvážení mezi zvýšením kontrastu a odšuměním, abychom neztratili důležité části v lékařském snímku [25].



Obrázek 24: Ukázka úpravy kontrastu pomocí nelineární modifikace a ekvalizace histogramu

Moderní techniky pro úpravu kontrastu s využitím waveletové transformace nejčastěji začínají s aplikací waveletovy transformace na upravovaný obraz. V druhé fázi procesu jsou na všechny waveletovské koeficienty (aproximační koeficienty zůstávají nedotčeny) aplikovány určité operace. Charakter těchto operací závisí na cílu, kterého chceme dosáhnout. Chceme-li obraz vylepšit (v našem případě zvýšit kontrast), pak lze např. přidat určitý přírůstek k waveletovským koeficientům. Problém ovšem nastane, když původní obraz obsahuje šum. Pak mnoho waveletovských koeficientů, obzvláště ve vyšších měřítkách rozlišení, bude produkovat šum. Jakýkoliv přírůstek aplikovaný na tyto koeficienty bude viditelný v upraveném obraze po následné inverzní waveletové transformaci, která je posledním krokem při úpravě kontrastu. Výše zmíněnými operacemi je myšleno aplikace lineární nebo nelineární modifikace na dané koeficienty [26].

Modifikace využívající lineárního zobrazení, kde určité waveletovské koeficienty jsou vynásobeny určitou hodnotou přírůstku, mají tendenci k zvýšení ostrosti hran. Pokud bude mamogram vylepšen pomocí lineárního zobrazení, obsahující jeden zřejmý mikrokalcifikát (vysoká intenzita), tak výsledkem budou velmi hrubé změny v dynamickém rozsahu zobrazení. Tento problém řeší nelineární modifikace. Dále se budeme zajímat pouze o nelineární modifikaci waveletovských koeficientů. Představme si tři různé typy nelineárních modifikací [25]:

- 1. typ: funkce je dána následujícím předpisem

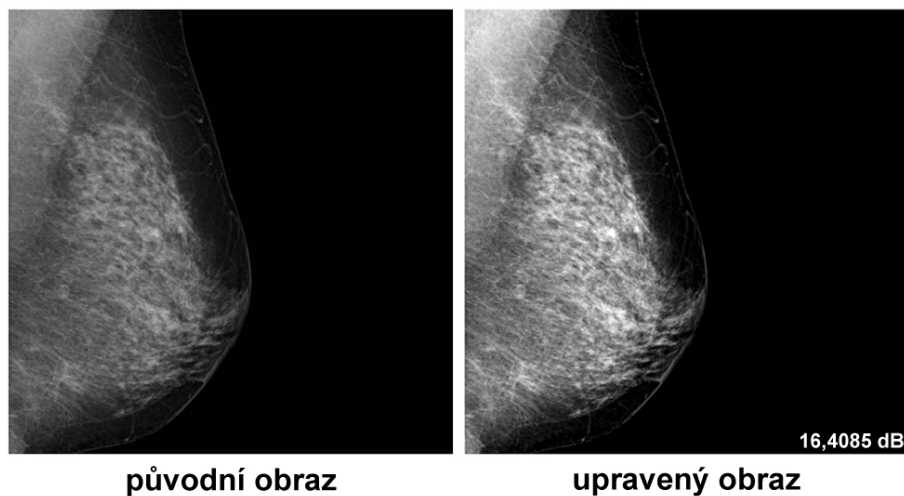
$$W(x) = \begin{cases} K_2x - K_1T^2, & \text{pro } x < -T \\ K_1x^2, & \text{pro } |x| \leq T \\ K_2x + K_1T^2, & \text{pro } x > T, \end{cases} \quad (21)$$

kde práh T slouží k určení, do jaké hodnoty se šum téměř potlačí. Při vyšších hodnotách (typicky nad 2) je to za cenu ztráty detailů. Koeficienty nad hodnotou T jsou pak zesíleny. Parametr K_1 určuje stupeň doostření (vhodné volit hodnoty 1 až 3). Parametr K_2 pak udává míru zvýšení kontrastu v obraze (hodnoty 1 až 5). Na obrázku 25 lze vidět mamografický snímek (převzato z [27]), u něž byl zvýšen kontrast pomocí (21). Byly zde použity následující hodnoty parametrů: $T = 0,5$; $K_1 = 0,5$; $K_2 = 1,6$. Vzhledem k použité hodnotě T byl šum potlačen jen velmi jemně.

- 2. typ: předpis je dán následovně

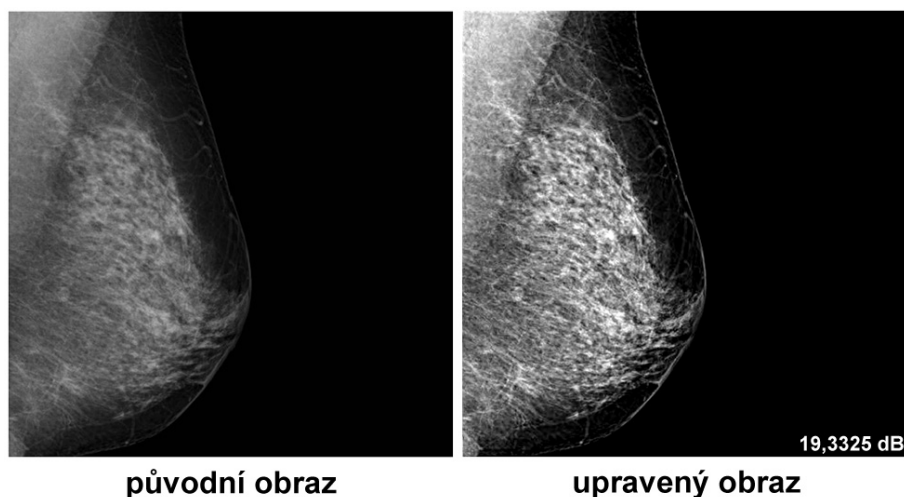
$$W(x) = \begin{cases} K_1x - K_2T_2, & \text{pro } x < -T_2 \\ K_2x - K_1T_1, & \text{pro } -T_1 > x > -T_2 \\ K_1x, & \text{pro } |x| \leq T_1 \\ K_2x + K_1T_1, & \text{pro } T_1 < x < T_2 \\ K_1x + K_2T_2, & \text{pro } x > T_2, \end{cases} \quad (22)$$

kde narozdíl od 1. typu přibyl jeden prahovací parametr navíc. Tím jsou koeficienty rozděleny do třech intervalů. Po experimentech se ukázalo, že parametry je vhodné volit takto: práh $T_1 (< T_2)$ by měl být blízko nuly, T_2 pak mezi hodnotami 10 až 100,



Obrázek 25: Úprava kontrastu pomocí (21) s vlnkou Daubechies 8

čím větší hodnota, tím i kontrast bude větší. Pro zbylé parametry pak musí platit, že $K_2(> K_1)$ a jejich hodnoty přibližně do 10. Čím větší rozdíl mezi K_2 a K_1 , tím bude kontrast opět větší. Na obrázku 26 je zobrazen efekt úpravy kontrastu dle (22) s parametry: $T_2 = 30$; $T_1 = 5$; $K_1 = 1,5$; $K_2 = 2$. Vzhledem k hodnotám K_2 , K_1 byl kontrast navýšen jen velmi málo. Nutno podotknout, že dle charakteru (22) nedochází k potlačení šumu, ale k mírnému zvýraznění koeficientů v této oblasti dle parametru K_1 . Pokud by byl šum nad únosnou mez, bylo by potřeba, aby modifikaci koeficientů předcházela nějaká prahovací metoda viz kapitola 5.1.

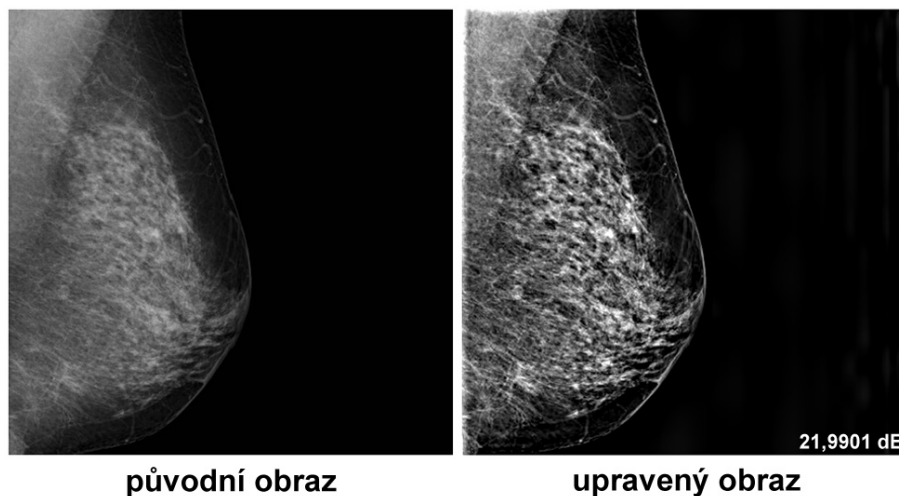


Obrázek 26: Úprava kontrastu pomocí (22) s vlnkou Daubechies 16

- 3. typ: poslední použitou nelineární funkcí pro modifikaci koeficientů je [26]

$$W(x) = \begin{cases} x + [T_2 \cdot (G - 1)] - (T_1 \cdot G), & \text{pro } x > T_2 \\ G \cdot (x - T_1), & \text{pro } T_2 \geq x > T_1 \\ 0, & \text{pro } |x| \leq T_1 \\ G \cdot (x + T_1), & \text{pro } -T_1 > x \geq -T_2 \\ x - [T_2 \cdot (G - 1)] + (T_1 \cdot G), & \text{pro } x < -T_2, \end{cases} \quad (23)$$

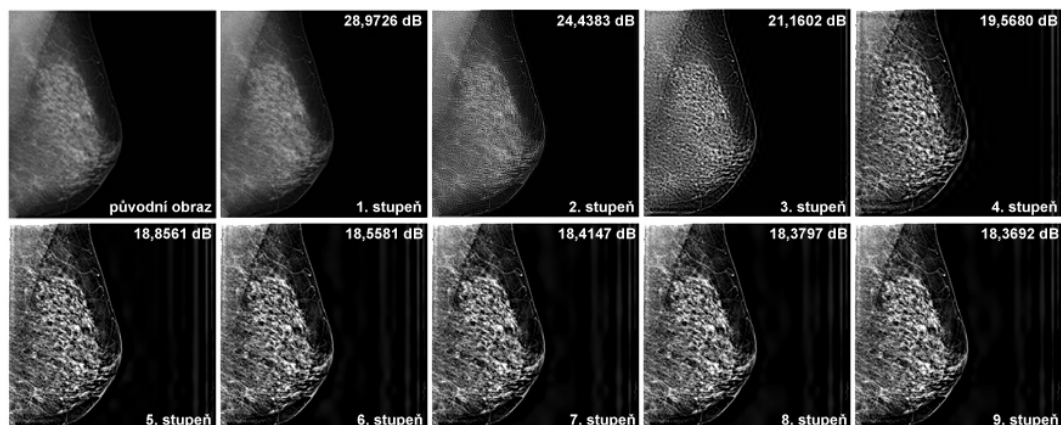
kde všechny koeficienty, jejichž absolutní hodnota je pod hodnotou T_1 budou vynulovány. Lze tedy říct, že tento typ modifikace s rozumně zvolenou hodnotou T_1 odstraní nežádoucí šum nejlépe. Ostatní koeficienty (neobsahující šum) jsou zvětšeny určitou hodnotou přírůstku G . Nad mez T_2 přírůstek G klesá se zvyšující se velikostí koeficientů. Typické hodnoty prahu T_1 jsou blízko nuly do hodnoty 3, vyšší hodnota rozmáže důležité detaily v obraze. Práh T_2 volíme kolem hodnoty 150. Výrazně vyšší hodnota zvýší hodnotu jasu příliš (výsledkem je mnoho přepálených míst a tím ztráta informace), nižší hodnota učiní mamogram méně čitelný a zvýrazní i nechtěné detaily v obraze. Hodnotu přírůstku G volíme mezi 1 až 5, čím větší hodnota, tím bude kontrast v obraze větší. Pro $G = 1$ nedojde k žádné změně v kontrastu. Na obrázku 27 je ukázka nelineární modifikace koeficientů pomocí (23) s hodnotami: $T_1 = 0,5$; $T_2 = 150$; $G = 3$.



Obrázek 27: Úprava kontrastu pomocí (23) s vlnkou Daubechies 8

Než přejdeme k porovnání, je třeba ještě zmínit, jaký stupeň dekompozice je vhodný při této aplikaci waveletové transformace. V dřívějších aplikacích bylo vhodnější se držet nižších stupňů dekompozice (zpravidla 2 až 3). Jedná-li se ale o modifikaci waveletových koeficientů, logicky je potřeba zasáhnout, co nejvíce takových koeficientů, abychom dosáhli požadovaného efektu. Na obrázku 28 lze vidět, jak se se zvyšujícím stupněm dekompozice, zvýší také kontrast ve výsledném obraze. Zde pro obraz 512×512 px je

maximální stupeň 9, je tedy vhodné volit mezi pátým až devátým stupněm pro takto velký obraz.



Obrázek 28: Vliv stupně dekompozice na změnu kontrastu, 3. typ modifikace, vlnka Daubechies 16

Na obrázcích 25, 26, 27 bylo použito devět stupňů dekompozice. Na následném porovnávacím obrázku 30 naopak šest stupňů dekompozice.

Porovnejme nyní jednotlivé tři typy nelineárních modifikací s různými vlnkami na rentgenovém snímku hrudního koše. Jeho původní podoba před úpravou kontrastu je zobrazena na obrázku 29 (převzato z [28]). Samotné porovnání pak na následujícím obrázku 30.

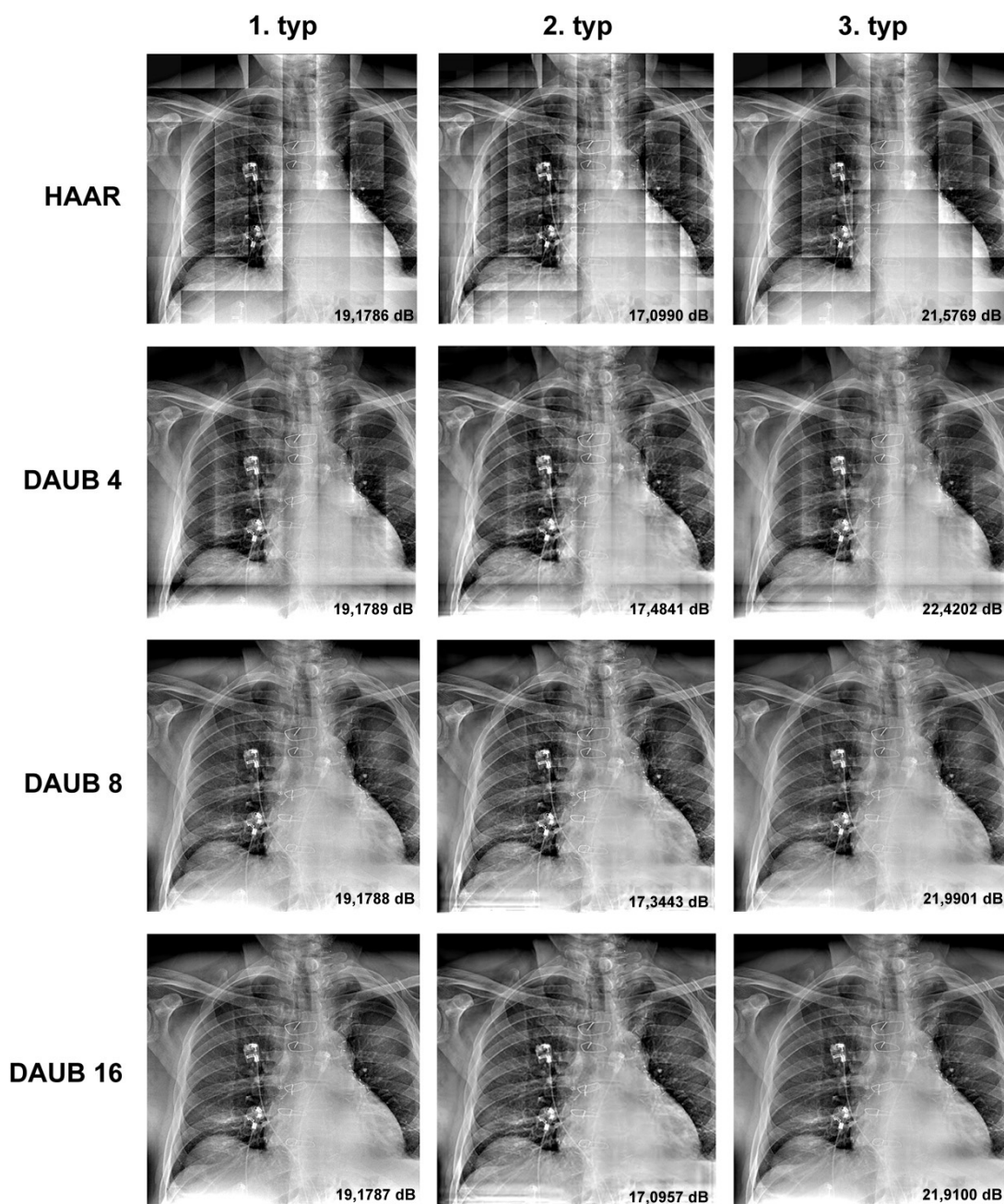
Hodnoty pro 1. typ byly: $T = 0,9$; $K_1 = 1,1$; $K_2 = 3$. Hodnoty pro 2. typ byly: $T_2 = 100$; $T_1 = 5$; $K_1 = 2$; $K_2 = 3$. A pro 3. typ: $T_1 = 0,5$; $T_2 = 1000$; $G = 3$.



Obrázek 29: Původní plochý snímek hrudního koše určený k následné úpravě kontrastu

Tak jako u jiných aplikací waveletové transformace je v rohu každého snímku na obrázku 30 zobrazen špičkový odstup signál/šum (PSNR). Avšak je nutno podotknout, že tato metrika nevypovídá o celkové kvalitě výsledného obrazu. Úprava kontrastu je, ať chceme

či ne, ztrátový proces, tj. neobnovitelný. Ovšem celkové vnímání upraveného obrazu se může zlepšit, proto zde vizuální posouzení hraje velkou roli.

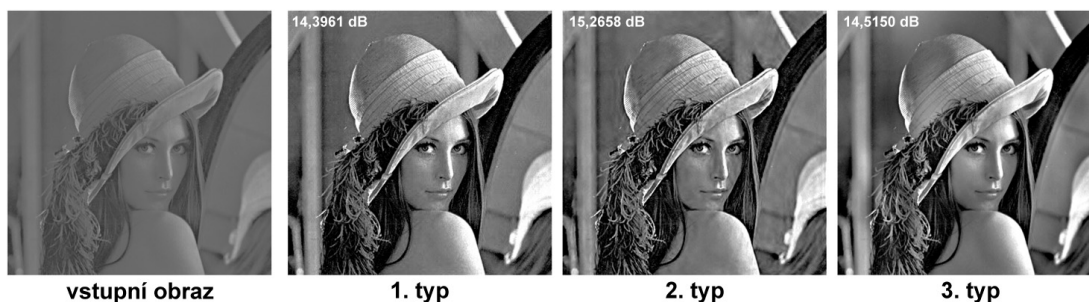


Obrázek 30: Úprava kontrastu pomocí třech představených modifikací v porovnání s vlnkami

Dle [26] neexistuje jediná metrika, která by dobře korelovala s kvalitou obrazu tak, jak ji vnímá lidské oko. Při posuzování se proto používá více metrik naráz, nelze-li se spokojit

s vizuálním posouzením. Metrika PSNR má svůj význam při posuzování, nakolik byl obrazový šum eliminován. Při experimentech bylo potvrzeno, že čím silněji jsme kontrast zvýšili, tím byla hodnota PSNR nižší. Podíl šumu ve výsledném obrazu lze velmi dobře porovnat (PSNR) mezi jednotlivými typy modifikací, s kterými jsme pracovali. U 2. typu modifikace (viz (22)) jsme již zmínili, že nedochází k odstranění šumu, proto i hodnota PSNR je ze všech porovnávaných nejnižší. U 3. typu modifikace (viz (23)) je šum (koeficienty blízko nuly) silně potlačen, hodnota PSNR je proto nejvyšší. Porovnáním z hlediska použité vlnky lze rovnou vyloučit použití té nejjednodušší (Haarovy vlnky). Hodnota PSNR zde, jak lze vidět, nehraje žádnou roli. Degradace obrazu je příliš značná. Vlnka Daubechies 4 je na tom o něco lépe, ale i přesto je "kostkovaný" obraz stále zřetelný. Vlnky Daubechies 8 a 16 poskytují srovnatelně podobné výsledky.

Na obrázku 31 uvádíme ještě porovnání tří modifikací s obrázkem Lenny, který byl pro lepší posouzení výrazně zbaven kontrastu. Použili jsme devět stupňů dekompozice s vlnkou Daubechies 16. Vizuálně nejlepší výsledek přináší 3. typ modifikace.



Obrázek 31: Úprava kontrastu pomocí třech představených modifikací s obrázkem Lenny

5.4 Rozpoznávání vzorů

Další zajímavou oblastí v digitálním zpracování obrazu je rozpoznávání vzorů v obraze (pattern recognition). Může se jednat například o

- rozpoznávání znaků (character recognition),
- klasifikace textur (texture classification),
- rozpoznávání obličejů (human face recognition).

Každá z těchto poměrně náročných oblastí zpracování obrazu sestává z kombinace mnoha metod včetně waveletové transformace. Základním pilířem všech zmíněných oblastí je detekce hran, na níž se v této kapitole zaměříme. Detekce hran (edge detection) hraje důležitou roli ve zpracování obrazu. Je hlavním nástrojem v již zmíněném rozpoznávání vzorů, segmentaci obrazu a v analýze scén. Detektor hran je v podstatě filtr typu horní propust, který umí extrahovat z obrazu body, které jsou hranami obrazu [29].

5.4.1 Tradiční detektory hran

Konvenční detektory hran prochází přes pixely obrazu, kde první derivace intenzity pixelu je větší než nějaký práh nebo hledá místa, kde druhá derivace intenzity pixelu má průchod nulou. Mezi tradiční algoritmy pro detekci hran patří: gradientní detektory, Laplacian of Gaussian (LOG) detektor, detektor využívající průchodů nulou a Cannyho detektor [30].

Gradientní metody byly jedny z prvních technik k detekci hran. Tyto metody využívají specificky navrhnuté masky, jimiž prochází obraz a detekuje hrany pomocí lokalizace maximum v gradientu obrazu. Celý proces je realizován diskrétní konvolucí směrové derivační masky s obrazem. Nejznámějšími operátory jsou Sobelův, Prewittův a Robertsův operátor. Celkově se jedná o efektivní a lehce implementovatelné metody. Naneštěstí, pokud se v obraze vyskytuje šum, gradientní metody jsou k němu velmi citlivé a obvykle berou šum jako součást skutečné hrany nebo dokonce dojde k vynechání některých skutečných hran, kvůli narušení obrazu šumem [30].

Posledním zmiňovaným byl Cannyho detektor. Ten dokáže odolávat šumu, protože používá Gaussovu funkci k vyhlazení obrazu. John. F. Canny se držel seznamu kritérií ke zlepšení gradientních metod detekce hran. Prvním kritériem byla **správná detekce**. Je totiž důležité, aby algoritmus našel co nejvíce skutečných hran. Dalším kritériem byla **dobrá lokalizace**. To znamená, že vzdálenost mezi skutečnou a nalezenou hranou by měla být minimální. Třetím byla **minimální odezva**, tzn. daná hrana by měla být detekována pouze jednou, obrazový šum by neměl produkovat falešnou hranu. Po redukci šumu pomocí Gaussovy funkce je třeba pro každý pixel spočítat velikost gradientu, k čemuž lze použít již zmiňovaný Sobelův či Prewittův operátor a také směr gradientu. Pro daný pixel se pomocí směru gradientu naleznou lokální maximum, které odpovídá dané hraně. Následně se uplatní technika Non-Maximum suppression, která má za úkol ztenčit hrany. Pak se provede hysterézní prahování, které silné hrany zanechá, slabé buď elimiňuje, nebo také zanechá, pokud již existuje cesta k silné hraně. Ačkoli Cannyho metoda je

považována za lepší metodu než gradientní metody, LOG detektor či metoda využívající průchody nulou, tak stále má určité praktické omezení. Zaprvé, blízké hrany se mohou navzájem ovlivnit, zejména pokud standardní odchylka Gaussovy funkce je příliš velká. Výsledkem je pak nepřesná lokalizace hrany a někdy i její ztráta. Zadruhé, hysterézní prahování vyžaduje nejen nastavení dvou prahů metodou pokus omyl, ale také ovládání zobrazovacího prostředí, aby byla zajištěna platnost přednastavených prahů [30].

5.4.2 Detekce hran pomocí waveletů

Hrany v obraze lze matematicky definovat jako lokální singularity. Až do nedávna byla hlavním nástrojem k analýze singularit Fourierova transformace. Avšak Fourierova transformace je globální a ne příliš adaptivní k lokálním singularitám. Waveletová analýza je analýzou lokální a je zejména vhodná pro časově-frekvenční analýzu, která je zásadní pro detekci singularit. Myšlenka je podobná Cannyho detektoru. Cannyho detektor využívá Gaussovu funkci jako vyhlazovací funkci θ , zatímco waveletovský přístup využívá θ' jako waveletovskou funkci [29].

5.4.2.1 Konstrukce waveletů pro detekci hran

Popišme nyní konstrukci waveletové transformace pro detekci hran, kde jsme vycházeli z [30]. Necht' dvourozměrná vyhlazovací funkce je libovolnou funkcí, jejíž dvojný integrál je nenulový. Definujme dvě vlnky, které představují parciální derivace dle proměnných x a y dvourozměrné vyhlazovací funkce $\theta(x, y)$

$$\Psi^1(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \quad \text{a} \quad \Psi^2(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y}.$$

Necht' $\Psi_s^1(x, y) = \left(\frac{1}{s}\right)^2 \Psi^1\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right)$, $\Psi_s^2(x, y) = \left(\frac{1}{s}\right)^2 \Psi^2\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right)$, které jsou s -dilatací $\Psi^1(x, y)$ a $\Psi^2(x, y)$, kde s je měřítko, $s = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$, $j \in (-\infty, \infty)$. Necht' signál $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. $L^2(\mathbb{R}^2)$ značí Hilbertův prostor s kvadrátem integrovatelných funkcí takových, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Pak waveletová transformace definována vzhledem k $\Psi^1(x, y)$ a $\Psi^2(x, y)$ má dvě části

$$W_s^1 f(x, y) = f * \Psi_s^1(x, y) \quad \text{a} \quad W_s^2 f(x, y) = f * \Psi_s^2(x, y).$$

Dá se ukázat, že platí [30]

$$\begin{pmatrix} W_s^1 f(x, y) \\ W_s^2 f(x, y) \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (f * \theta_s)(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (f * \theta_s)(x, y) \end{pmatrix} = s \nabla (f * \theta_s)(x, y).$$

Chceme-li lokalizovat pozice hran obrazu $f(x, y)$, je třeba uvažovat lokální maximum gradientu v různých měřítkách. Pozice hran jsou dány

$$M_s f(x, y) = \left\| \begin{pmatrix} W_s^1 f(x, y) \\ W_s^2 f(x, y) \end{pmatrix} \right\| = \|s \nabla(f * \theta_s)(x, y)\| = \sqrt{(W_s^1 f(x, y))^2 + (W_s^2 f(x, y))^2},$$

kde $s = 2^j, j \in \mathbb{Z}, j \in (-\infty, \infty)$. Funkce $M_s f(x, y)$ se také nazývá **modul waveletové transformace v měřítku s** . Bod (x, y) je bodem hrany v měřítku s , pokud velikost gradientu $M_s f(x, y)$ nabývá lokálního maxima dle směrového gradientu $A_s f(x, y)$ definovaného

$$A_s f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{W_s^2 f(x, y)}{W_s^1 f(x, y)} \right).$$

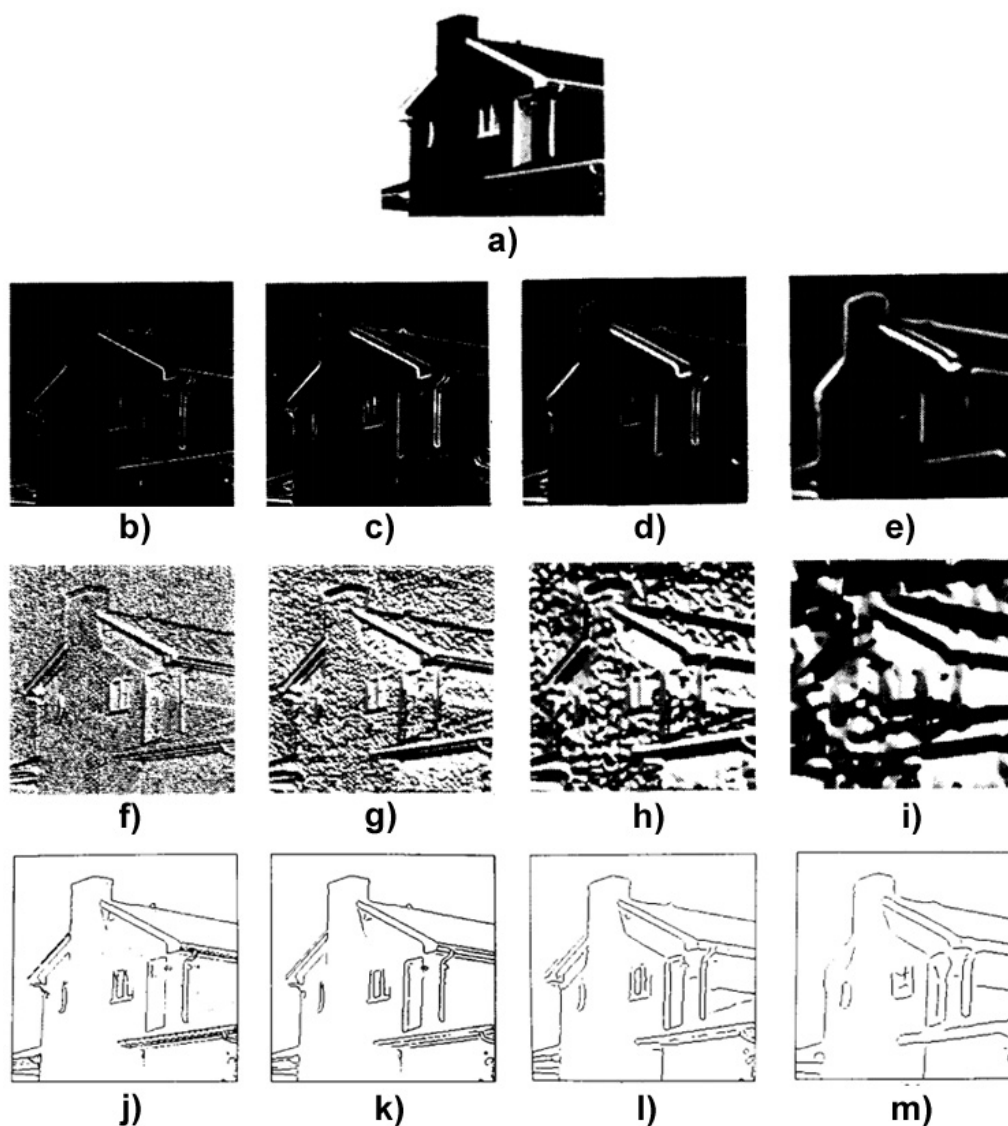
Ukládáme jen ty body (x, y) , které jsou dle $A_s f(x, y)$ lokálním maximem. Pak takový obraz s hranami v měřítku s se dále prahuje dle

$$E_s f(x, y) = \begin{cases} 0, & \|W_s f(x, y)\| < T \\ 1, & \|W_s f(x, y)\| \geq T, \end{cases}$$

kde T je prahovací parametr, který rozdělí obraz na hrany (bílá) a pozadí (černá). Mnohdy se výsledek pro přehlednost invertuje, pak jsou hrany černé. Zvolme jako vyhlazovací funkci Gaussovu funkci danou předpisem

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}.$$

Příklad víceúrovňové detekce hran je zobrazen na obrázku 32. Při detekci hran s využitím speciálních waveletů dosáhneme mnohem lepších výsledků než s využitím tradiční waveletové transformace [30].



Obrázek 32: a) původní obraz. b) - e) obraz $M_s f(x, y)$ pro $s = 2^j, 1 \leq j \leq 4$. Černé pixely indikují nulové hodnoty a bílé pixely korespondují s nejvyššími hodnotami. f) - i) obraz $A_s f(x, y)$ pro $s = 2^j, 1 \leq j \leq 4$. Hodnoty úhlů v rozmezí od 0 (černá) po 2π (bílá). j) - m) Výsledný obraz s detekovanými hranami (černě). Obrázky byly převzaty z [30]

5.4.2.2 Detekce hran s tradičními wavelety

Ukažme nyní bez nutnosti implementace speciálních waveletů z předchozí podkapitoly 5.4.2.1, detekci hran s tradičními wavelety. Představme si dvě různé techniky:

1. technika:

- dopředná waveletová transformace obrazu,
- s aproximačními koeficienty se provede derivace ve směru x a ve směru y , tj. její diskrétní aproximace dle předpisů [31]

$$f_x(x, y) \approx f(x + 1, y) - f(x, y),$$

$$f_y(x, y) \approx f(x, y + 1) - f(x, y),$$

- spočteme gradient obrazové funkce (v našem případě obrazová funkce představuje aproximační koeficienty) $M(x, y)$ a směr gradientu $A(x, y)$ dle předpisů [31]

$$M(x, y) = \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2},$$

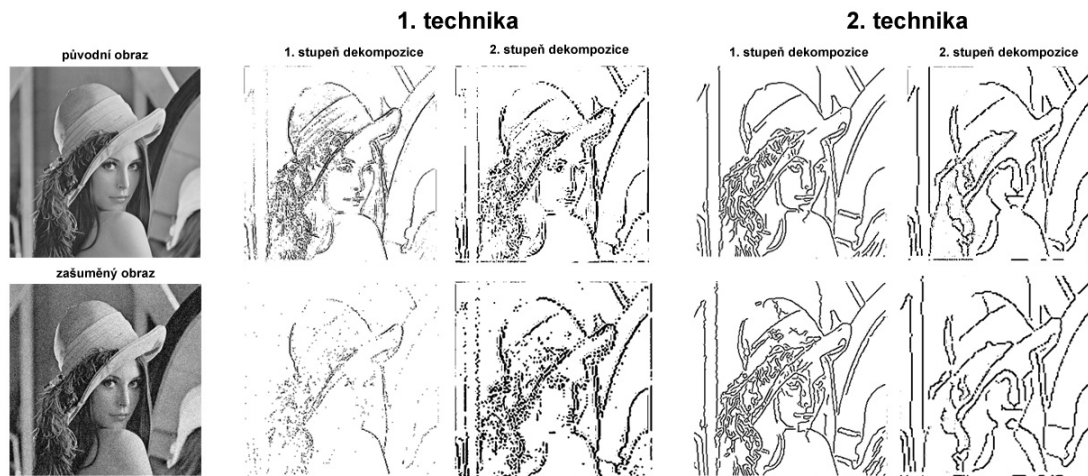
$$A(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{f_y}{f_x} \right),$$

- procházíme obraz $M(x, y)$ přes všechna (x, y) a v daném okolí ve směru gradientu $A(x, y)$ určíme maximální hodnotu pixelu, která pak odpovídá dané hraně,
- pokud původní obraz obsahoval šum, aplikujeme na všechny detailní koeficienty prahovací metodu VisuShrink (viz kapitola 5.1.1),
- neboť při prvním kroku používáme většinou malý stupeň dekompozice, šum se pravděpodobně bude nacházet i v aproximačních koeficientech po detekci hran, je proto vhodné tento šum vhodným prahováním odstranit,
- zpětná waveletová transformace,
- nakonec pro větší přehlednost detekovaných hran se obraz invertuje, aby hrany byly černé a pozadí bílé, opět vhodným prahováním.

2. technika:

- dopředná waveletová transformace obrazu,
- na aproximační koeficienty se aplikuje Cannyho metoda (viz 5.4.1 a [30]),
- v případě zašuměného obrazu se aplikuje prahovací metoda VisuShrink (5.1.1),
- zpětná waveletová transformace,
- neboť po rekonstrukci obrazu jsou hrany zašedlé, tak se obraz invertuje stejně jako v první technice.

Ukažme nyní na obrázku 33 výsledek těchto dvou technik. U obou se provedly maximálně dva stupně dekompozice. Porovnání bylo provedeno s obrázkem Lenny i pro zašuměný obraz s vlnkou Daubechies 16. Jak lze vidět z obrázku 33, detekujeme-li hrany u zašuměného obrazu, tak dostaneme o něco horší výsledek. Detekovací metoda považuje šum za hrany, a proto vznikají chyby při detekci.



Obrázek 33: Detekce hran pomocí dvou různých technik

Waveletová transformace v metodách detekce hran má významnou roli. Porovnejme si v případě zašuměného obrazu, že s využitím waveletové transformace dosáhneme lepšího výsledku. Na obrázku 34 jsme nejprve za a) využili Cannyho detektoru k detekci hran, kde jsme jej jednoduše aplikovali na celý zašuměný obraz.



Obrázek 34: Porovnání detekce hran s Cannyho detektorem. a) Cannyho detektor aplikovaný na celý obraz. b) Odšuměný obraz a následný Cannyho detektor na celý obraz. c) Technika č. 2 s využitím waveletové transformace při detekci

Výsledek je poměrně uspokojivý, ale mnoho hran vlivem šumu nebylo detekováno. Za b) jsme zašuměný obraz nejprve odšumili pomocí metody VisuShrink s waveletovou transformací a následně po rekonstrukci obrazu jsme na celý odšuměný obraz aplikovali Cannyho detektor. Tentokrát jsme obdrželi lepší výsledek v porovnání s a), kde hrany zůstaly více zachovány. Za c) je již představená 2. technika, kde jsme použili první stupeň

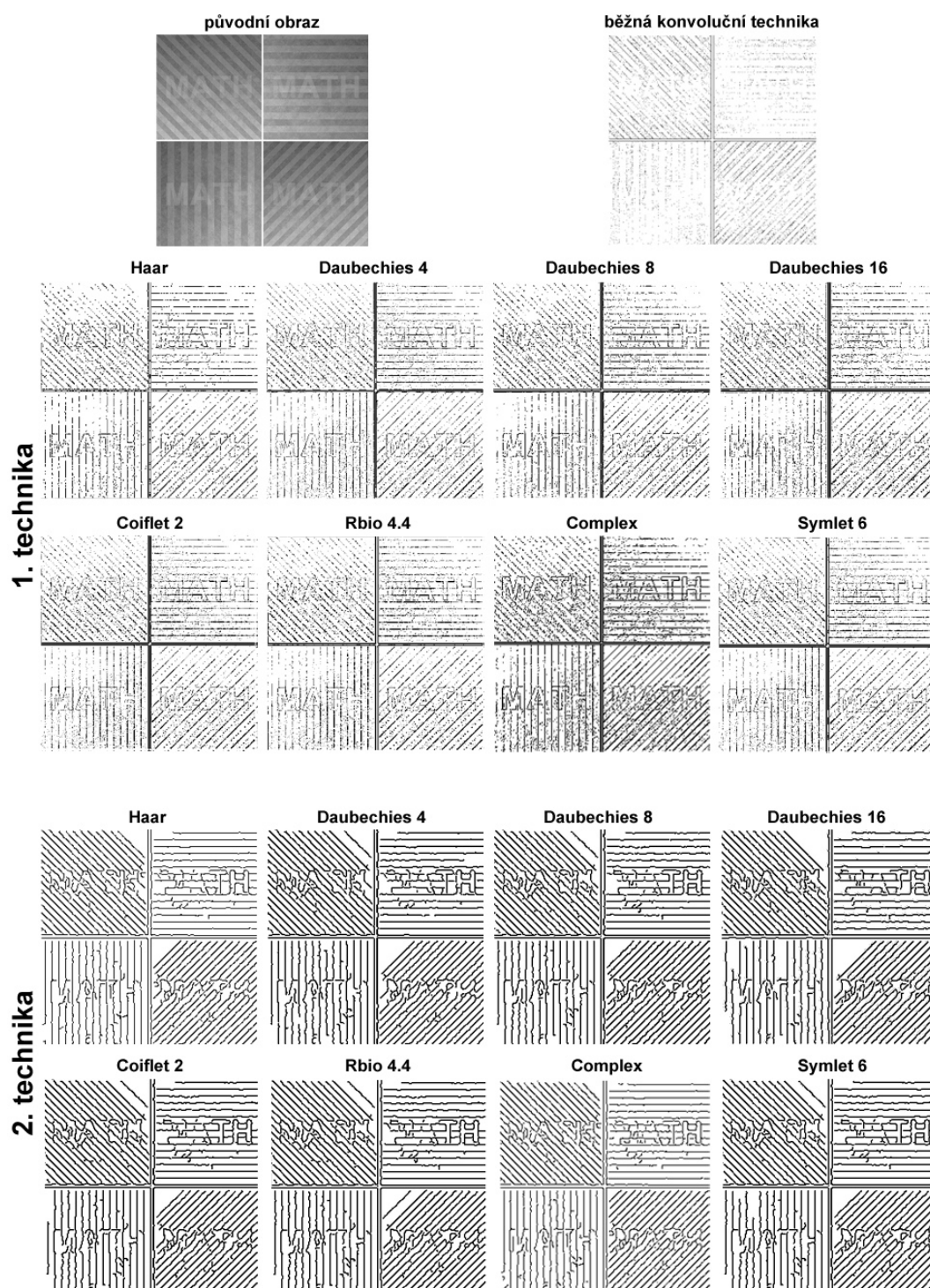
dekompozice, kde se Cannyho detektor aplikuje na aproximační koeficienty a detailní koeficienty jsou prahovány metodou VisuShrink. V porovnání s b) jsme ušetřili výpočetní výkon, neboť všechny důležité operace jsou provedeny v jádru waveletové transformace. V c) jsme také dosáhli nejlepšího výsledku.

Vrátme se nyní zpět ke dvěma zmiňovaným technikám detekce hran a porovnejme je mezi sebou s různými vlnkami. Pro detekci jsme využili místo obrázku Lenny obrazec obsahující vertikální, horizontální a diagonální vzory spolu s prolnutým textem v jednom. Obraz je záměrně málo kontrastní, neboť se tím ztěžuje samotná detekce. Porovnání je na obrázku 35, kde jsme zobrazili výsledek detekce i pro jednoduchou metodu, kdy se provede konvoluce obrazu s konvoluční maskou. Jak lze vidět, nápis "MATH" je téměř nečitelný.

U první techniky je jednoznačně nejlepší komplexní wavelet. Nejvíce zviditelní text a diagonální vzor vpravo dole. Pěkný výsledek dává také ve většině případů vlnka Daubechies 4. Vlnky Coiflet 2, RBio 4.4 a Symlet 6 poskytují srovnatelný výsledek. Překvapivě je nejhorší vlnkou Daubechies 16 místo nejjednodušší Haarovy vlnky, která nespokojovala u jiných aplikací uspokojivé výsledky. U diagonálního vzoru vlevo nahoře neuspěla žádná vlnka až na komplexní vlnku. Mnoho čar včetně textu nebylo detekováno.

Porovnejme techniku č. 2. Komplexní vlnka v této technice dopadla opět nejlépe. Z ostatních vlnek pro oba diagonální vzory byla také vhodná vlnka Symlet 6. Pro horizontální a vertikální vzory pak vlnky RBio 4.4 a Daubechies 8. V této technice s využitím Cannyho detektoru jsou všechny linie hran stejně silné, tudíž je detekce textu v komplikovaném vzoru, jako je tento, obtížná. Přesto technika č. 2 dává lepší výsledek než technika první. Cannyho detektor je sám o sobě skvělý nástroj k detekci hran. Ve spojení s waveletovou transformací lze však získat ještě lepší výsledky. K metodám s využitím Cannyho detektoru nutno podotknout, že výsledek závisí také na hodnotách nastavených přímo v detektoru. Při chybném nastavení může dojít k horšímu výsledku než u nejjednodušších metod používaných u detekce hran. Pro porovnání zde jsme zvolili vhodný kompromis mezi zachováním skutečné a odstraněním chybné hrany.

Vzhledem k výsledkům dvou porovnávaných technik pro detekci hran, je nejlepší volbou vlnka komplexní. Naopak není vhodné používat vlnku Daubechies 16. Při porovnávání nemá smysl uvažovat metriku PSNR, neboť není vypovídající o kvalitě detekce hran.



Obrázek 35: Porovnání dvou technik pro detekci hran s různými vlnkami

6 Závěr

Cílem této diplomové práce bylo seznámit se s různými aplikacemi waveletové transformace a následně je implementovat v programu MATLAB. Zaměřili jsme se na čtyři oblasti digitálního zpracování obrazu a tedy na odstraňování obrazového šumu, kompresi obrazu, úpravu kontrastu a detekci hran. Pro každou z těchto aplikací jsme používali několik waveletů, které ovlivňují výsledek dané aplikace.

V kapitole o odstraňování obrazového šumu jsme porovnali tři prahovací metody. Zjistili jsme, že metoda BayesShrink poskytuje nejostřejší výsledek. Nejméně ostrý výsledek naopak metoda SureShrink. Záleží tedy na tom, co je pro danou aplikaci vhodnější, jestli méně šumu, ale také méně ostrosti (SureShrink) nebo více šumu, ale ostřejší výsledek (BayesShrink). Kompromisem mezi těmito dvěma metodami je VisuShrink, navíc je velmi jednoduchá na implementaci. Nejlepší výsledek jsme dosáhli s použitím waveletu Daubechies 4. Haarův wavelet dává poměrně kostkovaný obraz a u waveletu Daubechies 16 vznikají okolo hran artefakty, proto nelze tyto vlnky doporučit k odstraňování obrazového šumu.

Kapitola o kompresi obrazu je převážně teoretického charakteru, kde lze nalézt užitečné informace o kompresním standardu JPEG 2000 a jeho porovnání s tradičním JPEG standardem.

Kapitola věnující se úpravě kontrastu je směřována k problému převážně medicínských snímků, které je třeba vylepšit pro její další zpracování či diagnostiku. Zaměřili jsme se na úpravu kontrastu s využitím nelineární modifikace waveletovských koeficientů, která při vhodně zvolené nelineární funkci, umožňuje zvýšit kontrast v obraze a zároveň zabránit, aby byl zvýrazněn i nežádoucí šum. Představili jsme si tři různé typy těchto modifikací. Výsledek byl velmi závislý na konkrétním nastavení parametrů modifikace a také na použitém waveletu. Pro každý obraz bylo nutno tyto parametry měnit dle toho, jak vstupní obraz vypadal. Konkrétní doporučená nastavení těchto parametrů jsou v práci uvedena. Zcela nevhodná je opět Haarova vlnka, kde docházelo ke značné degradaci obrazu. Oproti kapitole o odšumování obrazu, nejlepší výsledek poskytla vlnka Daubechies 16. Nelze proto obecně říct, že konkrétní wavelet bude vhodný pro všechny možné aplikace.

V poslední kapitole jsme využili waveletovou transformaci k detekci hran. Tradiční detektory, např. Cannyho detektor, dokážou velmi efektivně detekovat hrany v obraze do chvíle, kdy je vstupní obraz zašuměný. Šum velice ztěžuje proces detekce, kdy dochází k detekci falešných hran a tím k chybám při následné identifikaci objektů, vzorů či obličejů. Proto s využitím tradičních metod detekce hran, waveletové transformace, prahovací metody VisuShrink jsou v práci představeny dvě vlastní techniky k detekci hran. Výsledky jsou v porovnání s metodami bez využití WT mnohem lepší. V této kapitole jsme také porovnávali mezi více druhy waveletů včetně waveletu komplexního,

který také poskytl nejlepší výsledek. Přijatelný výsledek opět poskytla vlnka Daubechies 4 a nejhorší výsledek vlnka Daubechies 16, kterou dokonce předčila vlnka Haarova. Jde tedy o jedinou aplikaci waveletové transformace, s kterou jsme pracovali, kde lze doporučit i Haarův wavelet.

Na přiloženém CD najdeme pro jednotlivé aplikace zdrojové kódy pro MATLAB, které případný zájemce může vyzkoušet. Další vývoj této práce by mohl směřovat k prohloubení problematiky jednotlivých aplikací a vytvoření automatizovaného softwaru, který by vstupní obraz vyhodnotil a sám se rozhodl, zda odstranit obrazový šum, zvýšit/snížit kontrast či jiné vylepšení obrazu a následně by mohl takto upravený obraz zobrazit nebo uložit do souboru ve formátu JPEG 2000. To vše i pro barevné obrazy, jelikož v této práci jsme pro jednoduchost pracovali pouze s černobílými obrazy. Využití lze vidět hlavně u medicínských snímků, u kterých výsledek zpracování hraje zásadní roli.

7 Literatura

- [1] GAO, R. X. - YAN, R. *Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing*, 2011.
- [2] HOLMAN, P. - NAJZAR, K. *Wavelets. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 44(4): 294 - 303, 1999.
- [3] HORÁK, D. *Diskrétní transformace*, 2011, [online]. [cit. 2014-11-28].
Dostupné z WWW:
http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/diskretni_transformace.pdf.
- [4] DONOHO, D. - JOHNSTONE, I. M. *De-noising by soft-thresholding*, IEEE Transactions on Information Theory, sv. 41, č. 3, s. 613–627, 1995.
- [5] RUIKAR, S. D. - DOYE, D. D. *Wavelet based image denoising technique*, International Journal of Advanced Computer Science and Applications, sv. 2, č. 3, s. 49–53, 2011.
- [6] LUISIER, F. - BLU, T. - UNSER, M. *A new SURE approach to image denoising: Interscale orthonormal wavelet thresholding*, IEEE Transactions on Image Processing, sv. 16, č. 3, s. 593–606, 2007.
- [7] SIHAG, R. - SHARMA, R. - SETIA, V. *Wavelet Thresholding for Image De-noising*, IJCA Proceedings on International Conference on VLSI, Communications and Instrumentation (ICVCI), s. 20–24, 2011.
- [8] CHANG, S. G. - YU, B. - VATTERELI, M. *Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising and Compression*, IEEE Transactions on Image Processing, s. 1532-1546, 2000.
- [9] ČASTOVÁ, N. - HORÁK, D. - KALÁB, Z. *The wavelet based analysis of seismic signals and not only of them*, Aplimat 2006. Proceedings of the International Conference. 2006
- [10] DOSTÁL, Z. - VONDRÁK V. *Lineární algebra*, 2012, [online]. [cit. 2015-1-4].
Dostupné z WWW:
http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra.pdf.
- [11] RABBANI, M. - JOSHI, R. *An overview of the JPEG 2000 still image compression standard*, Signal Processing: Image Communication 17, s. 3 - 48, 2002.
- [12] QADIR, G. - ZHAO, X. - HO, A. T. *Estimating JPEG2000 Compression for Image Forensics Using the Benford's Law*, [online]. [cit. 2015-3-15]. Dostupné z WWW:
https://www.surrey.ac.uk/computing/files/pdf/papers/Anthony_Ho/Ghulam2010.pdf.
- [13] *Applications for JPEG 2000*, [online]. [cit. 2015-3-15]. Dostupné z WWW:
<http://www.jpeg.org/jpeg2000/applications.html>.

-
- [14] *NIST Fingerprint Testing and Standards*, 2013, [online]. [cit. 2015-3-15].
Dostupné z WWW:
http://biometrics.nist.gov/cs_links/fingerprint/NIST%20Fingerprint%20Testing%20Standards%20V2%2002282013.pdf.
- [15] *JPEG2000 compression*, 2013, [online]. [cit. 2015-3-15]. Dostupné z WWW:
<http://www.prepressure.com/library/compression-algorithm/jpeg2000>.
- [16] SHAPIRO, J. *Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients*, IEEE Trans Signal Process, 41:3445–3462, 1993.
- [17] VALENS, C. *EZW encoding*, 2004, [online]. [cit. 2015-3-15].
Dostupné z WWW:
<http://polyvalens.pagesperso-orange.fr/clemens/ezw/ezw.html>.
- [18] WITTEN, I. H. - RADFORD, M. N. - CLEARY, J. G. *Arithmetic coding for data compression*, Communication of the ACM, 30:520–540, 1987.
- [19] LI, J. *Image Compression: The Mathematics of JPEG2000*, Modern Signal Processing MSRI publications, 46:185-221, 2003.
- [20] *What are MPEG and JPEG formats and What's better*, 2003, [online]. [cit. 2015-3-15].
Dostupné z WWW:
http://www.imakenews.com/kin2/e_article000195658.cfm.
- [21] *Why do Math: JPEG2000 Features/Enhancements*, [online]. [cit. 2015-3-15].
Dostupné z WWW:
<http://www.whymath.org/node/wavlets/jpeg2000features.html>.
- [22] *Why do Math: JPEG2000 Quantization*, [online]. [cit. 2015-3-15]. Dostupné z WWW:
<http://www.whymath.org/node/wavlets/jpeg2000quantization.html>.
- [23] MATELA, J. *Implementace JPEG2000 komprese na GPU*. Brno, 2009. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Fakulta informatiky.
- [24] ŠIMEK, J. *Využití pokročilých objektivních kritérií hodnocení při kompresi obrazu*. Brno, 2010. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav telekomunikací.
- [25] STEFANO, H. - KAKOUIROS, S. - CAVOURAS, D. - WALLACE, M. *Wavelet-based Mammographic Enhancement*. University of Athens. Samos. Greece. 2005.
- [26] BROWN, T. J. *An Adaptive Strategy for Wavelet Based Image Enhancement*. Proceedings IMVIP. Image and Vision Systems Group. 2000.

-
- [27] *Mammography FAQ*. Department of Radiology. Breast Imaging Division. [online]. [cit. 2015-4-22]. Dostupné z WWW:
<http://www.med.unc.edu/radiology/breastimaging/services/mammography>
- [28] *Image Processing*. Upstate Medical University. [online]. [cit. 2015-4-22]. Dostupné z WWW:
<http://www.upstate.edu/radiology/education/rsna/processing/>
- [29] LI, J. *A Wavelet Approach to Edge Detection*. Master thesis. Sam Houston State University. 2003.
- [30] CHANG, F. J. *Wavelet for Edge Detection*. Time frequency analysis and Wavelet transform. National Taiwan University. 2009.
- [31] HLAVÁČ, V. *Hledání hran*. ČVUT. Centrum strojového vnímání. Praha. [online]. [cit. 2015-4-22]. Dostupné z WWW:
<http://cmp.felk.cvut.cz/%7Ehlavac/TeachPresCz/11DigZprObr/22EdgeDetectionCz.pdf>
- [32] MOEN, H. *Wavelet transforms and efficient implementation on the GPU*, Master thesis, University of Oslo, 2007.
- [33] BACHMAN, G. - NARICI, L. - BECKENSTEIN, E. *Fourier and wavelet analysis*, Springer, ISBN 0-387-98899-8, s. 496, 2000.
- [34] NOVOTNÝ, R. *Aplikace waveletové transformace v software Mathematica a Sage*, Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav telekomunikací, Brno, 2012.
- [35] WASILEWSKI, F. *Wavelet browser by PYWAVELETS*. [online]. [cit. 2015-4-28]. Dostupné z WWW: <http://wavelets.pybytes.com>
- [36] VALOUCH, L. *Implementace vlnkové transformace v jazyku C++*, Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav telekomunikací, Brno, 2011.